

1.10 Uegentlige integraler

De bestemte integraler, vi har set på tidligere, har været på formen

$$\int_a^b f(x) dx$$

hvor grænserne a og b er tal, og hvor integranden $f(x)$ er kontinuert på intervallet.

Vi vil se nærmere på en type af integraler, hvor vi tillader, at $-\infty$ og ∞ optræder som grænser, f.eks.

$$\int_3^{\infty} \frac{1}{x^2} dx \quad \int_{-\infty}^0 e^x dx \quad \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx$$

Disse integraler kalder vi *uegentlige* integraler.

Eksempel 1.10.1

Vi vil i dette eksempel se på, hvordan vi giver mening til det uegentlige integral

$$\int_0^{\infty} e^{-x} dx$$

Vi antager, at $b > 0$. Så er

$$\int_0^b e^{-x} dx = [-e^{-x}]_0^b = -e^{-b} - (-e^0) = 1 - e^{-b}$$

Idet $1 - e^{-b} = 1 - \frac{1}{e^b} \rightarrow 1$ for $b \rightarrow \infty$, vil

$$\int_0^b e^{-x} dx \rightarrow 1 \quad \text{for } b \rightarrow \infty$$

Denne grænseværdi betegner vi med $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$, og vi siger, at *det uegentlige integral $\int_0^{\infty} e^{-x} dx$ eksisterer*, da grænseværdien eksisterer.

Altså vil

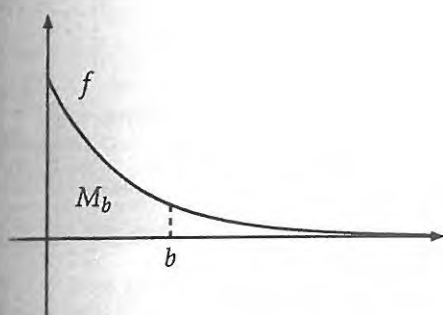
$$\int_0^b e^{-x} dx \rightarrow \int_0^{\infty} e^{-x} dx \quad \text{for } b \rightarrow \infty \quad \text{og} \quad \int_0^{\infty} e^{-x} dx = 1$$

Vi ved, at

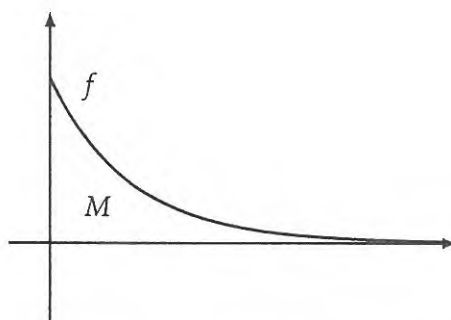
$$A(M_b) = \int_0^b e^{-x} dx$$

er arealet af den punktmængde M_b i 1. kvadrant, der er begrænset af grafen for f og x -aksen, som vist på Figur 1.10.1.

Tilsvarende opfatter vi det uegentlige integral som arealet af den ubegrænsede punktmængde M i 1. kvadrant, der ligger mellem grafen og x -aksen, som vist på Figur 1.10.2.



Figur 1.10.1 $A(M_b) = \int_0^b e^{-x} dx$



Figur 1.10.2 $A(M) = \int_0^\infty e^{-x} dx$

Øvelse 55

Vi definerer nu

Definition 1.10.1. Antag, at funktionen f er kontinuert og defineret på $[a; \infty[$. Hvis integralerne $\int_a^b f(x) dx$ har en grænseværdi for $b \rightarrow \infty$, så definerer vi *det uegentlige integral fra a til ∞* som

$$\int_a^\infty f(x) dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$$

Tilsvarende definerer vi $\int_{-\infty}^b f(x) dx$.

Definition 1.10.2. Antag, at funktionen f er kontinuert og defineret på $]-\infty; b]$. Hvis integralerne $\int_a^b f(x) dx$ har en grænseværdi for $a \rightarrow -\infty$, så definerer vi *det uegentlige integral fra $-\infty$ til b* som

$$\int_{-\infty}^b f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\int_a^b f(x) dx \right)$$

Definition 1.10.3. Antag, at funktionen f er kontinuert og defineret på $] -\infty; \infty[$.

Hvis integralerne $\int_a^b f(x) dx$ har en grænseværdi for $a \rightarrow -\infty$ og $b \rightarrow \infty$, så definerer vi *det uegentlige integral fra $-\infty$ til ∞* som

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \left(\lim_{b \rightarrow \infty} \left(\int_a^b f(x) dx \right) \right)$$

Eksempel 1.10.2

Vi vil bestemme arealet af punktmængden M mellem grafen for

$$f(x) = xe^{-x}, 0 \leq x < \infty$$

og x -aksen, se figur 1.10.3.

Det gør vi ved at beregne

$$\int_0^{\infty} xe^{-x} dx$$

Vi benytter, at

$$\int xe^{-x} dx = -xe^{-x} - e^{-x}$$

så arealet ud til b er

$$\int_0^b xe^{-x} dx = [-xe^{-x} - e^{-x}]_0^b = -be^{-b} - e^{-b} + 1$$

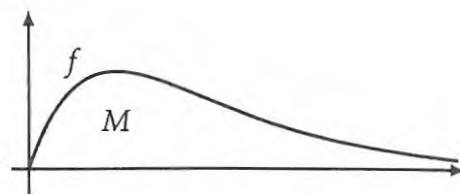
Lader vi $b \rightarrow \infty$, vil $be^{-b} \rightarrow 0$, hvilket fremgår af Figur 1.10.3, og $e^{-b} \rightarrow 0$, så

$$\int_0^b xe^{-x} dx = -be^{-b} - e^{-b} + 1 \rightarrow 1 \quad \text{for } b \rightarrow \infty$$

Dermed er arealet af M

$$A(M) = \int_0^{\infty} xe^{-x} dx = 1$$

➤ Øvelse 56, Øvelse 57, Øvelse 58



Figur 1.10.3