

Kurvelængde for en parameterkurve

Sætning

Lad $\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ være en differentiabel vektorfunktion, hvor de afledede koordinatfunktioner $x'(t)$ og $y'(t)$ er kontinuerte. Længden L af parameterkurven for $\vec{s}$ i intervallet $[a, b]$ kan bestemmes ved

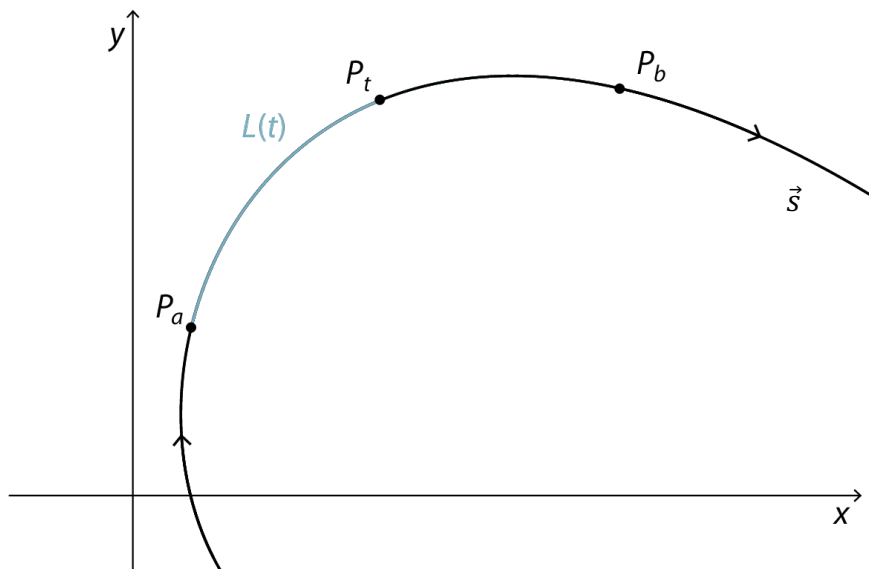
$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt.$$

Bevis

Vi starter med at indføre en kurvelængdefunktion:

$L(t)$ = længden af parameterkurven for $\vec{s}$ i intervallet $[a, t]$.

På figuren nedenfor er $L(t)$ er længden af den blå del af kurven mellem punkterne P_a og P_t .



Om funktionen $L(t)$ gælder, at

- $L(a) = 0$
- $L(b) = L$, da de begge betegner længden af parameterkurven i intervallet $[a, b]$.

For at bevise sætningen, vil vi vise, at funktionen $L(t)$ er differentiabel med differentialkvotient

$$L'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Med andre ord viser vi, at $L(t)$ er en stamfunktion til $\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$. Hvis dette er vist, så kan vi nemlig udregne følgende:

$$\int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt = [L(t)]_a^b = L(b) - L(a) = L - 0 = L,$$

hvilket vil afslutte beviset. Bemærk, at integralet giver mening, da vi har antaget, at $x'(t)$ og $y'(t)$ er kontinuerte, så integranden er kontinuert og har dermed en stamfunktion iflg. integralregningens hovedsætning.

Vi viser nu, at $L(t)$ er differentiabel med differentialkvotient $L'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ ved brug af tretrinsreglen og en geometrisk analyse. Vi vælger således et tilfældigt tal t_0 i intervallet $]a, b[$.

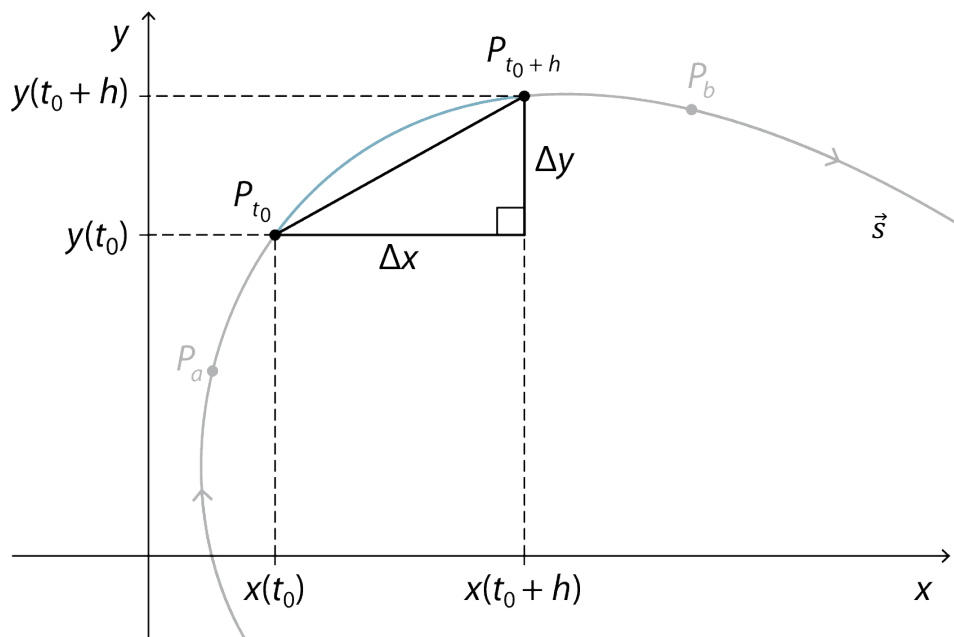
Trin 1:

Vi opskriver differensen

$$L(t_0 + h) - L(t_0),$$

hvor h er en lille tilvækst, der enten kan være positiv eller negativ. Vi vil i det følgende nøjes med at se på det tilfælde, hvor h er positiv. Tilfældet, hvor h er negativ, kan behandles på stort set samme måde.

Differensen $L(t_0 + h) - L(t_0)$ er længden af kurvestykket mellem punkterne P_{t_0} og P_{t_0+h} (markeret med blå på figuren nedenfor). Som det også fremgår af figuren er denne længde tilnærmelsesvist lig med længden af hypotenusen i den retvinklede trekant, der har kateterne Δx og Δy .



Med Pythagoras' sætning gælder derfor tilnærmelsen

$$\begin{aligned} (L(t_0 + h) - L(t_0))^2 &\approx (\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 \\ L(t_0 + h) - L(t_0) &\approx \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2} \end{aligned} \quad \curvearrowright$$

Jo tættere h er på 0, desto bedre er tilnærmelsen.

Trin 2:

Vi opskriver differenskvotienten og omskriver:

$$\begin{aligned}
 \frac{L(t_0+h)-L(t_0)}{h} &\approx \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{h} \\
 &\approx \frac{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}{\sqrt{h^2}} \\
 &\approx \sqrt{\frac{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}{h^2}} \\
 &\approx \sqrt{\frac{(\Delta x)^2}{h^2} + \frac{(\Delta y)^2}{h^2}} \\
 &\approx \sqrt{\left(\frac{\Delta x}{h}\right)^2 + \left(\frac{\Delta y}{h}\right)^2} \\
 &\approx \sqrt{\left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\right)^2}
 \end{aligned}$$

Trin 3:

Vi lader $h \rightarrow 0$ og undersøger differenskvotientens grænseværdi. Fra trin 2 ved vi, at

$$\frac{L(t_0+h)-L(t_0)}{h} \approx \sqrt{\left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\right)^2}$$

Da tilnærmelsen bliver bedre, desto tættere h er på 0, kan vi konkludere, at de to udtryk har samme grænseværdi:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{L(t_0+h)-L(t_0)}{h} \right) = \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sqrt{\left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h}\right)^2 + \left(\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h}\right)^2} \right).$$

Da vi ved, at $x(t)$ og $y(t)$ er differentiable, så gælder, at

$$\begin{aligned}
 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{x(t_0+h)-x(t_0)}{h} \right) &= x'(t_0) \\
 \lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{y(t_0+h)-y(t_0)}{h} \right) &= y'(t_0).
 \end{aligned}$$

Samlet set får vi dermed, at

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \left(\frac{L(t_0+h) - L(t_0)}{h} \right) &= \lim_{h \rightarrow 0} \left(\sqrt{\left(\frac{x(t_0+h) - x(t_0)}{h} \right)^2 + \left(\frac{y(t_0+h) - y(t_0)}{h} \right)^2} \right) \\ &= \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}.\end{aligned}$$

Da differenskvotienten har en grænseværdi for $h \rightarrow 0$, så er $L(t)$ differentiabel i t_0 , og grænseværdien er lig med differentialkvotienten. Altså er $L'(t_0) = \sqrt{(x'(t_0))^2 + (y'(t_0))^2}$, og da t_0 er valgt vilkårligt, så gælder generelt, at

$$L'(t) = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}.$$

Dette afslutter beviset.

Kilde

Ovenstående er en uddybet version af beviset i afsnit 6.9 af ibogen *MAT A3 stx*.