

STX

STUDENTEREKSAMEN



BØRNE- OG
UNDERVISNINGSMINISTERIET
STYRELSEN FOR
UNDERVISNING OG KVALITET

MATEMATIK A

Forberedelsesmateriale

Forberedelsesmateriale til stx-A MATEMATIK 2024-2025

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige undervisningstid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve. Det er tilladt at modtage vejledning under arbejdet med dette forberedelsesmateriale.

Ved den skriftlige prøve kan indhold og metoder fra forberedelsesmaterialet indgå i opgaver i begge delprøver.

Materialet indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til emnet "Sandsynlighedsregning".

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til delprøve 2 af den skriftlige prøve. Hvis der til delprøve 1 kræves kendskab til særlige definitioner og formler, vil der være et indstiksark til formelsamlingen. Dette indstiksark udleveres til eksamen sammen med opgaverne. Det findes også til slut i dette materiale.

Det foreliggende materiale er gældende i 2024 og 2025 for eksamen i maj-juni, august og december.

Sandsynlighedsregning

Indholdsfortegnelse

Indledning.....	3
Udfaldsrum og sandsynlighedsfunktion	4
Regning med sandsynligheder.....	6
Betinget sandsynlighed.....	8
Loven om total sandsynlighed.....	12
Bayes' sætning.....	15
Mere om Bayes' sætning og loven om total sandsynlighed	17
Indstiksark til formelsamlingen	21

Indledning

Indholdet af dette materiale falder i to hoveddele. Først kommer der en kort opsamling på vigtige grundbegreber i sandsynlighedsregning. Stoffet i denne del er i det store og hele kendt fra den forudgående undervisning i matematik. Dette afsnit tjener også til, at elever på A-hold har et fælles grundlag, selv om de er kommet til den afsluttende matematik A-undervisning ad meget forskellige veje.

Efter den indledende opsamling følger så materialets hovedfokus, som er begrebet betinget sandsynlighed, herunder Bayes' sætning. Afslutningsvis gennemgås et par større eksempler inden for medicin (Test for en sygdom) og jura (Anklagerens fejltagelse).

I forberedelsesmaterialet er der både øvelser og opgaver. Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder beviser for nogle af sætningerne. Opgaverne er tænkt som forberedelse til de opgaver, der kommer til den skriftlige eksamen.

I forberedelsesmaterialet anvendes fem typer af farvede bokse. Se eksempler på farvekoderne her:

Definition

Eksempel

Sætning

Øvelse

Øvelserne er tænkt som hjælp til forståelse af teorien, herunder også beviser for nogle af sætningerne.

Opgave



Opgaverne er vejledende eksempler på de opgaver, der kan komme til den skriftlige eksamen. Opgaver markeret med et tastatur kan kun forekomme i delprøve 2.

Opgave



Opgaver markeret med hånd og blyant kan forekomme i begge delprøver.

Udfaldsrum og sandsynlighedsfunktion

I sandsynlighedsregning arbejder man med forsøg, hvor udfaldet af identisk udførte udgaver af forsøget ikke på forhånd kan forudsiges. Sådanne forsøg kaldes *stokastiske* forsøg. Som eksempel herpå kan nævnes terningekast, møntkast og at trække et kort fra et spil kort. Et stokastisk forsøg har en række mulige udfald, og mængden af mulige udfald udgør udfaldsrummet U .

I dette forberedelsesmateriale behandler vi kun udfaldsrum med et endeligt antal udfald $u_1, u_2, \dots, u_n$, så $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$.

Eksempel 1 Udfaldsrummet for kast med en sædvanlig terning med seks sider er $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Udfaldsrummet for kast med en mønt er $U = \{\text{plat}, \text{krone}\}$. Udfaldsrummet for træk af ét kort fra et sædvanligt spil kort er $U = \{\clubsuit\text{Es}, \clubsuit 2, \clubsuit 3, \dots, \clubsuit 10, \clubsuit\text{B}, \clubsuit\text{D}, \clubsuit\text{K}, \diamondsuit\text{Es}, \dots, \diamondsuit\text{K}, \heartsuit\text{Es}, \dots, \heartsuit\text{K}, \spadesuit\text{Es}, \dots, \spadesuit\text{K}\}$.

Definition 1 Ved en *sandsynlighedsfunktion* P forstås en funktion, der til et vilkårligt udfald u_i i et udfaldsrum $U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ knytter et reelt tal $P(u_i)$, hvor der gælder, at

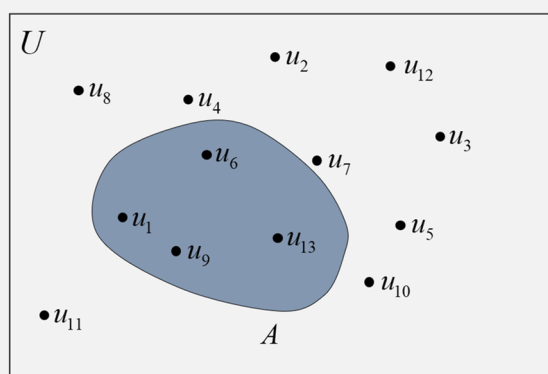
- $0 \leq P(u_i) \leq 1$
- $P(u_1) + P(u_2) + \dots + P(u_n) = 1$.

$P(u_i)$ kaldes sandsynligheden for udfaldet u_i .

Definition 2 Et *sandsynlighedsfelt* (U, P) er et udfaldsrum U med en sandsynlighedsfunktion P .

Definition 3 Ved en *hændelse* forstås en mængde A af udfald fra udfaldsrummet U . Sandsynligheden $P(A)$ for en hændelse A bestående af udfaldene $a_1, a_2, \dots, a_k$ fra U er givet ved $P(A) = P(a_1) + \dots + P(a_k)$.

Eksempel 2



Figur 1. Udfaldsrum U med 13 udfald og en hændelse A med 4 udfald.

Figur 1 viser et udfaldsrum $U = \{u_1, u_2, \dots, u_{13}\}$ med 13 lige sandsynlige udfald og hændelsen $A = \{u_1, u_6, u_9, u_{13}\}$ med 4 af disse udfald.

Da alle udfald er lige sandsynlige, er der tale om et symmetrisk sandsynlighedsfelt, og derfor er $P(u_i) = \frac{1}{13}$ for $i = 1, \dots, 13$.

Dermed vil sandsynligheden for hændelsen A være

$$P(A) = P(u_1) + P(u_6) + P(u_9) + P(u_{13}) = \frac{4}{13}.$$

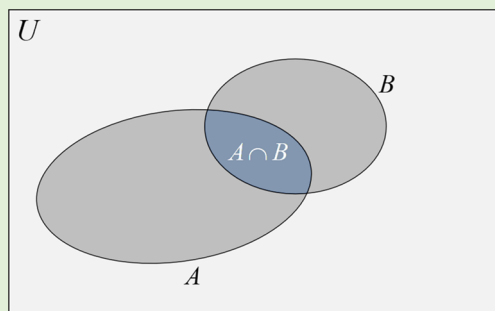
Opgave 1



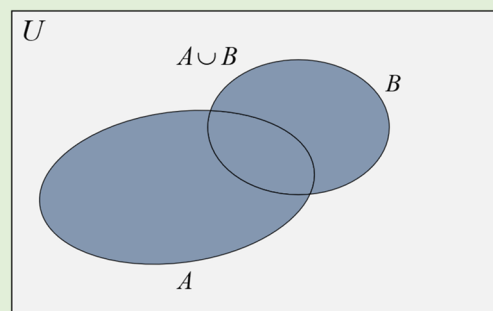
- a) Bestem med udgangspunkt i eksempel 2 sandsynligheden for hændelsen $H = \{u_1, u_6, u_9\}$.

I det følgende får vi brug for på forskellige måder at kombinere hændelser i et udfaldsrum. Vi indfører derfor nogle begreber fra mængdelære. Disse kan anskueliggøres med såkaldte Venn-diagrammer.

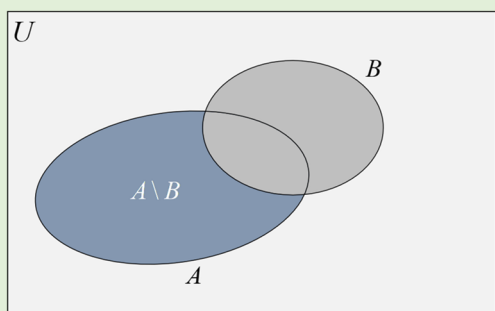
Definition 4 De 6 figurtekster nedenfor indeholder vigtige definitioner fra mængdelære. Figureerne kaldes Venn-diagrammer.



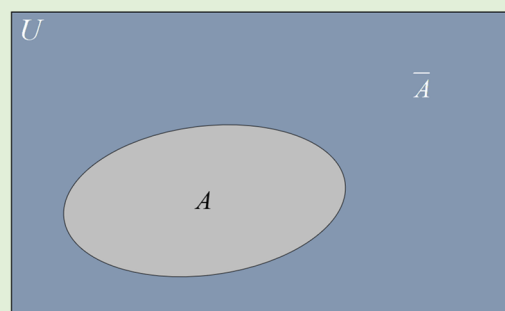
Figur 2. Fælleshændelsen $A \cap B$ består af de udfald, som ligger både i A og i B .



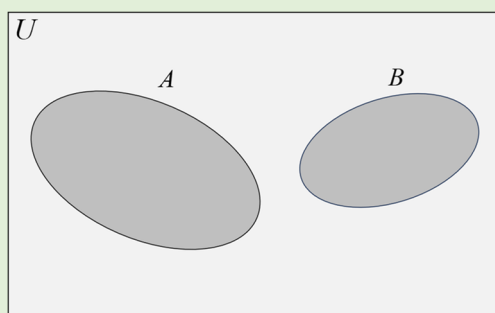
Figur 3. Foreningshændelsen $A \cup B$ består af de udfald, som ligger i A eller i B (inkl. de udfald, der ligger i dem begge).



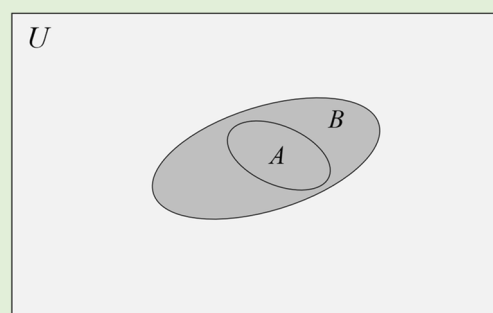
Figur 4. Differenshændelsen $A \setminus B$ består af de udfald, som ligger i A , men ikke i B .



Figur 5. Komplementærhændelsen $\bar{A}$ til A består af de udfald i U , som ikke ligger i A .



Figur 6. To hændelser A og B kaldes *disjunkte*, hvis de ikke har nogen fælles udfald.



Figur 7. Hvis en hændelse A er helt indeholdt i en anden hændelse B , er A en *delmængde* af B . Dette skrives $A \subseteq B$.

Opgave 2



- a) Bestem med udgangspunkt i eksempel 2 følgende sandsynligheder, når hændelsen $B = \{u_2, u_6, u_7, u_{12}, u_{13}\}$

$$P(A \cap B), P(A \cup B), P(A \setminus B), P(\bar{A}), P(\bar{A} \setminus B) \text{ og } P(\bar{B} \setminus A).$$

Opgave 3



Der er givet udfaldsrummet $U = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$ med sandsynlighedsfunktionen P bestemt ved nedenstående tabel

u	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$P(u)$	$\frac{1}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$	$\frac{4}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{2}{20}$	$\frac{3}{20}$

Vi ser på to hændelser

A : udfaldet er ulige

B : udfaldet er større end 6

- a) Bestem $P(A)$ og $P(A \cap B)$.
- b) Bestem sandsynligheden $P(\bar{A} \cup B)$ for, at udfaldet enten er et lige tal eller et tal, der er større end 6.
- c) Bestem $P(A \setminus B)$, og forklar, hvad dette tal betyder.

Regning med sandsynligheder

Da hændelser i et udfaldsrum er delmængder af udfaldsrummet, er det oplagt at benytte mængdelære til at kombinere hændelser og dermed bestemme sandsynligheden for forskellige kombinationer af hændelser. Sætning 1 er grundlæggende og meget nyttig i sandsynlighedsregning.

Sætning 1 I et sandsynlighedsfelt (U, P) , hvor A og B er to vilkårlige hændelser, gælder

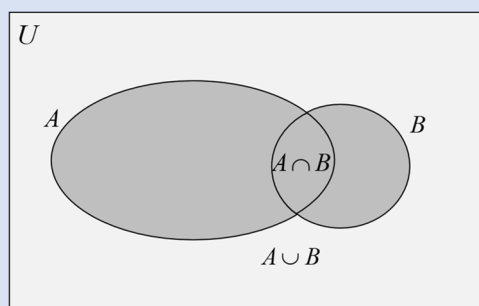
- a) $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
- b) Hvis $A \subseteq B$, er $P(A) \leq P(B)$
- c) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Det er oplagt, at sætning 1 a) og b) gælder. Sætning 1 c) bevises i øvelse 1.

Øvelse 1

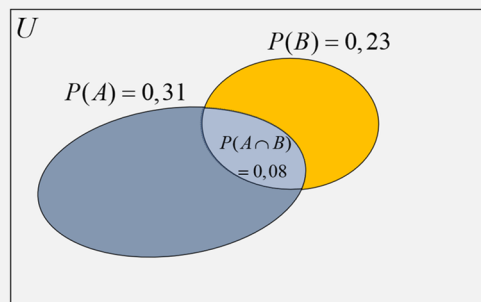
Bevis for Sætning 1 c)

Benyt Venn-diagrammet figur 8 til at bevise, at $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.



Figur 8

Eksempel 3 Om et sandsynlighedsfelt (U, P) , der indeholder to hændelser A og B , oplyses det, at $P(A) = 0,31$, $P(B) = 0,23$ og $P(A \cap B) = 0,08$. Dette kan anskueliggøres i Venn-diagrammet på figur 9.



Figur 9

Sandsynligheden $P(A \cup B)$ kan bestemmes direkte med sætning 1 c)

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,31 + 0,23 - 0,08 = 0,46.$$

Sandsynligheden $P(\bar{A} \cup B)$ kan bestemmes ved først at betragte figur 9.

Komplementærhændelsen $\bar{A}$ svarer til det grå og det orange område tilsammen, og foreningshændelsen $\bar{A} \cup B$ vil derfor svare til det grå, det orange og det lyseblå område til sammen. Nu kan $P(\bar{A} \cup B)$ bestemmes

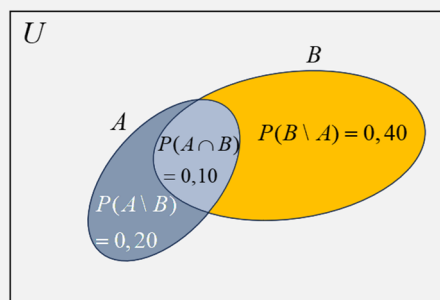
$$P(\bar{A} \cup B) = P(\bar{A}) + P(A \cap B) = (1 - 0,31) + 0,08 = 0,77.$$

Eksempel 4 I et sandsynlighedsfelt (U, P) er givet to hændelser A og B . Det oplyses, at $P(A \setminus B) = 0,20$, $P(A \cap B) = 0,10$ og $P(B \setminus A) = 0,40$. Disse oplysninger ses også på Venn-diagrammet på figur 10. Ved hjælp af figuren bestemmer vi en række sandsynligheder

$$P(A) = 0,20 + 0,10 = 0,30$$

$$P(B) = 0,10 + 0,40 = 0,50$$

$$P(A \cup B) = 0,20 + 0,10 + 0,40 = 0,70.$$



Figur 10

Disse sandsynligheder kan også bestemmes således

$$P(A) = P(A \setminus B) + P(A \cap B) = 0,20 + 0,10 = 0,30$$

$$P(B) = P(A \cap B) + P(B \setminus A) = 0,10 + 0,40 = 0,50$$

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = 0,30 + 0,50 - 0,10 = 0,70.$$

Opgave 4



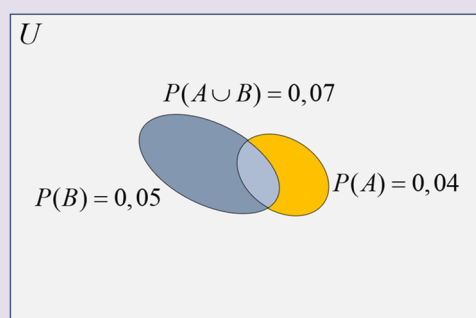
I et sandsynlighedsfelt (U, P) er givet to hændelser A og B . Det oplyses, at

$$P(A) = 0,04, \quad P(B) = 0,05 \quad \text{og}$$

$$P(A \cup B) = 0,07, \quad \text{se figur 11.}$$

a) Bestem $P(A \cap B)$ og $P(\bar{A} \cap B)$.

b) Bestem $P(\bar{A} \cap \bar{B})$.

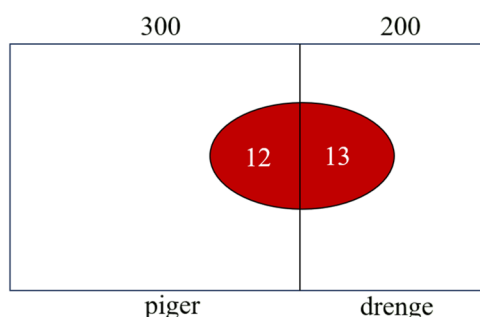


Figur 11

Betinget sandsynlighed

Inden for regning med sandsynligheder taler man om begrebet betinget sandsynlighed, som introduceres med eksemplet nedenfor.

På et gymnasium med 500 elever (300 piger og 200 drenge) er der 25 rødhårede (12 rødhårede piger og 13 rødhårede drenge). Man kan få overblik over oplysningerne ved at tegne et Venn-diagram som nedenstående.



Figur 12

Der vælges på tilfældig måde én elev.

Sandsynligheden for, at eleven er rødhåret, er $P(\text{rødhåret}) = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}} = \frac{25}{500} = 5\%$.

Vælges eleven blandt drengene, er sandsynligheden for, at han er rødhåret $\frac{13}{200} = 6,5\%$.

Vælges eleven blandt pigerne, er sandsynligheden for, at hun er rødhåret $\frac{12}{300} = 4\%$.

Det er praktisk at indføre en notation for de sidste to sandsynligheder

$$P(\text{rødhåret} | \text{dreng}) = \frac{13}{200} = 6,5\% \text{ og } P(\text{rødhåret} | \text{pige}) = \frac{12}{300} = 4\%.$$

$P(\text{rødhåret} | \text{dreng})$ læses "sandsynligheden for, at der vælges en rødhåret, når det er givet, at eleven er en dreng" eller i kortere form "sandsynligheden for rødhåret, givet dreng".

Den generelle definition på betinget sandsynlighed er

Definition 5 Den betingede sandsynlighed $P(A|B)$ for hændelsen A , når hændelsen B er indtruffet, er defineret som

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Symbolet $P(A|B)$ kan kort læses "sandsynligheden for A , givet B ".

Bemærk: I definition 5 er det underforstået, at sandsynligheden i nævneren ikke er 0.

I eksemplet ovenfor indføres hændelserne A : eleven er rødhåret og B : eleven er en dreng. Da bliver hændelsen $A \cap B$: eleven er både rødhåret og en dreng.

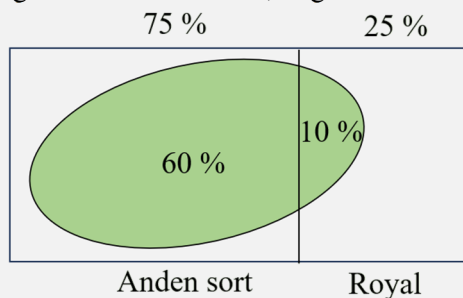
Vi får dermed, at $P(A) = \frac{25}{500} = 0,05$, $P(B) = \frac{200}{500} = 0,40$ og $P(A \cap B) = \frac{13}{500} = 0,026$.

$P(A|B)$ kan nu udregnes ved hjælp af definition 5.

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{13/500}{200/500} = \frac{13}{200} = 6,5\%. \text{ Altså samme resultat som ovenfor.}$$

- Øvelse 2**
- Forklar, hvad tallet $P(\text{dreng} | \text{rødhåret})$ betyder, og udregn derefter sandsynligheden $P(B | A) = P(\text{dreng} | \text{rødhåret})$ ved at bruge de absolutte tal ovenfor (figur 12).
 - Udregn $P(B | A)$ ved at bruge definition 5.
 - Besvar de samme spørgsmål som i a) og b), men nu for piger.

Eksempel 5 På et jordstykke plantes tulipanløg. 25 % af løgene er af sorten Royal. De resterende 75 % er af en anden sort. De løg, der både spirer og er af sorten Royal, udgør 10 % af alle løgene. De løg, der både spirer og er af den anden sort, udgør 60 % af alle løgene.



Figur 13

Procenttallene på figur 13 er angivet i procent af alle løg. Det farvede område illustrerer den hændelse, at et løg spirer.

Sandsynligheden for, at et løg spirer, givet at det er af sorten Royal, er

$$P(\text{spiring} | \text{Royal}) = \frac{P(\text{spiring} \cap \text{Royal})}{P(\text{Royal})} = \frac{0,10}{0,25} = 40 \% .$$

- Øvelse 3**
- Forklar, hvad tallet $P(\text{Royal} | \text{spiring})$ betyder, og udregn derefter denne sandsynlighed ved at bruge oplysningerne på figur 13.
 - Udregn $P(\text{Royal} | \text{spiring})$ ved at bruge definition 5.

Eksempel 6 Andelen af ledere under 30 år udgør i en bestemt virksomhed 3 % af det samlede antal ansatte. 25 % af virksomhedens ansatte er under 30 år. En tilfældigt ansat i virksomheden oplyser, at vedkommende er under 30 år.

- Hvad er sandsynligheden for, at den ansatte er leder?

Der indføres hændelserne L : ”leder” og T : ”under 30 år”.

Derved bliver de oplyste sandsynligheder $P(L \cap T) = 0,03$ og $P(T) = 0,25$.

Sandsynligheden $P(L | T)$ for, at den ansatte er leder, givet at vedkommende er under 30 år, er ifølge definition 5

$$P(L | T) = \frac{P(L \cap T)}{P(T)} = \frac{0,03}{0,25} = 0,12 .$$

Sandsynligheden for, at den ansatte er leder, givet at vedkommende er under 30 år, er altså 12 %.

Eksempel 7 I en bestemt løbeklub kan 16 % af de mandlige medlemmer løbe 5 kilometer på under 20 minutter. Gruppen af mandlige medlemmer, der kan løbe 5 kilometer på under 20 minutter, udgør 12 % af det samlede medlemstal.

- a) Bestem, hvor stor en andel af løbeklubbens medlemmer der er mænd.

Der indføres hændelserne

M : ”mandligt medlem”

T : ”kan løbe 5 kilometer på under 20 minutter”.

Ved at bruge disse hændelser kan oplysningerne skrives således

$$P(T|M) = 0,16 \text{ og } P(M \cap T) = 0,12.$$

Ifølge definition 5 har vi, at $P(T|M) = \frac{P(M \cap T)}{P(M)}$.

Vi skal bestemme $P(M)$ og løser derfor ovenstående ligning med hensyn til $P(M)$

$$P(M) = \frac{P(M \cap T)}{P(T|M)} = \frac{0,12}{0,16} = 0,75.$$

Andelen af mandlige medlemmer af løbeklubben er således 75 %.

Opgave 5



I en filmklub er andelen af mænd, der har gyserfilm som yndlingsfilm, 13 % af det samlede antal medlemmer. Desuden er 42 % af filmklubbens medlemmer mænd. Lad M betegne ”mandligt medlem”, og lad G betegne ”medlem med gyserfilm som yndlingsfilm”.

- a) Angiv $P(M)$ og $P(G \cap M)$, og forklar deres betydninger.
b) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt mandligt medlem af filmklubben har gyserfilm som sine yndlingsfilm.

Opgave 6



Peter er med i en Facebookgruppe, hvor 40 % af gruppens medlemmer bor i København, og 70 % af de medlemmer, der bor i København, bor i en lejlighed.

- a) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt medlem af Facebookgruppen bor i en lejlighed i København.

Opgave 7



Et stort antal kvinder er blevet spurgt om, hvor ofte de synger. Blandt kvinderne under 24 år er der 75 %, som synger dagligt. Kvinder under 24 år, som synger dagligt, udgør 27 % af det samlede antal adspurgte.

- a) Bestem, hvor stor en andel af de adspurgte kvinder der er under 24 år.

Eksempel 8 Peter kaster to sædvanlige terninger, en grøn og en blå. Trine kan ikke se udfaldene, men får oplyst af Peter, at en af terningerne er en sekser.

a) Hvad er sandsynligheden for, at summen af øjentallene er 10?

Udfaldsrummet for kast af den grønne og blå terning består af 36 lige sandsynlige udfald. Skemaet nedenfor viser, hvad summen af øjentallene bliver.

U	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

Hændelsen A er, at mindst én terning viser en sekser.

De 11 udfald i A er markeret med gul farve.

Hændelsen B er, at summen af øjentallene er 10.

De 3 udfald i B er markeret med en ring.

Hændelserne kan skrives

$$A = \{(1,6), (2,6), \dots, (6,6), (6,1), \dots, (6,5)\} \quad \text{og} \quad B = \{(4,6), (5,5), (6,4)\}.$$

$$\text{Sandsynlighederne er } P(A) = \frac{11}{36} \quad \text{og} \quad P(B) = \frac{3}{36}.$$

Vi ønsker at bestemme den betingede sandsynlighed for, at summen af øjentallene er 10, givet at der er mindst én sekser

$$P(B|A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)} = \frac{2/36}{11/36} = \frac{2}{11}.$$

Bemærk, at den information, der gives, er afgørende. Hvis Peter i stedet havde oplyst til Trine, at den grønne terning viste en sekser, ville sandsynligheden for, at summen af øjentallene var 10, dvs. at den anden (blå) terning viste en firer, i stedet være $1/6$.

Opgave 8



Der foretages to kast med en sædvanlig terning.

Hændelsen A er, at mindst et af kastene giver en sekser.

Hændelsen B er, at terningen giver en treer i det første kast.

a) Bestem sandsynlighederne $P(A)$ og $P(A|B)$.

b) Bestem $P(B|A)$, og forklar, hvad denne sandsynlighed betyder.

Opgave 9



I et sandsynlighedsfelt (U, P) er givet to hændelser A og B .

Der gælder, at $P(A \setminus B) = 0,3$, $P(A \cap B) = 0,1$ og $P(A \cup B) = 0,8$.

a) Bestem hver af sandsynlighederne $P(A)$, $P(B)$ og $P(A|B)$.

Loven om total sandsynlighed

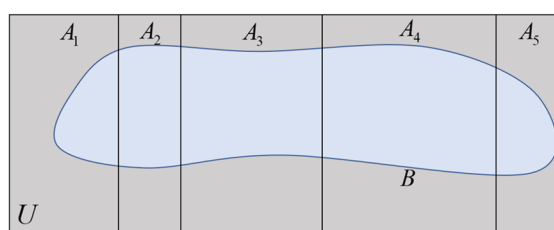
Er udfaldsrummet delt i flere disjunkte hændelser, får man brug for at kende loven om total sandsynlighed. Følgende eksempel introducerer loven om total sandsynlighed.

I et stort bed plantes 5 sorter tulipanløg $A_1, \dots, A_5$ med følgende fordeling og spiringsprocent

Sort	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
Andel	20 %	10 %	25 %	35 %	10 %
Spiringsprocent	15 %	60 %	45 %	50 %	30 %

Hændelsen B er "Et løg spirer".

Alle disse oplysninger illustreres i nedenstående Venn-diagram, hvor udfaldsrummet U er opdelt i de 5 disjunkte hændelser $A_1, \dots, A_5$.



Figur 14. Opdeling af udfaldsrummet.

Sandsynligheden for, at et løg spirer, givet det er af sorten A_i , er $P(B | A_i) = \frac{P(B \cap A_i)}{P(A_i)}$.

Heraf fås, at sandsynligheden for, at et løg både spirer og er af sorten A_i , er $P(B \cap A_i) = P(B | A_i) \cdot P(A_i)$.

Sandsynligheden $P(B)$ for, at et løg spirer, må være summen af sandsynlighederne for fælleshændelserne for B og A_i ($i = 1, \dots, 5$)

$$P(B) = P(B \cap A_1) + P(B \cap A_2) + \dots + P(B \cap A_5).$$

Ved indsættelse af $P(B \cap A_i) = P(B | A_i) \cdot P(A_i)$ i ovenstående fås

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B | A_5) \cdot P(A_5).$$

Vi kan nu udregne sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt løg spirer

$$P(B) = 0,15 \cdot 0,20 + 0,60 \cdot 0,10 + 0,45 \cdot 0,25 + 0,50 \cdot 0,35 + 0,30 \cdot 0,10 = 0,4075.$$

Dvs. sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt løg spirer, er 40,75 %.

Dette kan generaliseres til følgende sætning.

Sætning 2 Loven om total sandsynlighed

Lad B være en hændelse i et sandsynlighedsfelt (U, P) og $A_1, \dots, A_k$ være en opdeling af U i k disjunkte hændelser, så $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = U$. Da gælder, at

$$P(B) = P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B | A_k) \cdot P(A_k).$$

- Eksempel 9** En tekniker reparerer to typer af bærbare computere.
 31 % af de bærbare computere, der indleveres til reparation, er af Type 1, og de øvrige 69 % er af Type 2.
 Sandsynligheden for, at en bærbar computer af Type 1 kan repareres, er 82 %, og sandsynligheden for, at en computer af Type 2 kan repareres, er 73 %.
- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt computer, der er indleveret til reparation, kan repareres.

For at få overblik over de givne oplysninger opstilles en tabel

Computertype	Type 1 (T_1)	Type 2 (T_2)
Fordeling af computere	0,31	0,69
Sandsynlighed for reparation (R)	0,82	0,73

Oplysningerne i tabellen kan også skrives som sandsynlighederne

$$P(T_1) = 0,31, \quad P(T_2) = 0,69, \quad P(R|T_1) = 0,82 \text{ og } P(R|T_2) = 0,73.$$

Loven om total sandsynlighed (sætning 2) giver nu, at

$$P(R) = P(R|T_1) \cdot P(T_1) + P(R|T_2) \cdot P(T_2) = 0,82 \cdot 0,31 + 0,73 \cdot 0,69 = 0,758.$$

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt computer, der er indleveret til reparation, kan repareres, er derfor ca. 76 %.

Opgave 10



I et bed med tulipanløg er 30 % af løgene af Sort 1, hvor sandsynligheden er 90 % for, at et løg spirer. Resten af løgene er af Sort 2, hvor sandsynligheden er 80 % for, at et løg spirer.

- a) Bestem sandsynligheden for, at et tilfældigt valgt løg i bedet spirer.

Opgave 11



En fabrik har to maskiner, M_1 og M_2 .

Maskine M_1 producerer 500 pakker skruer om dagen med 100 skruer i hver pakke.

Erfaringsmæssigt er 3 % af skruerne defekte i hver pakke fra M_1 .

Maskine M_2 producerer 1000 pakker om dagen med 50 skruer i hver pakke.

Erfaringsmæssigt er 4 % af skruerne defekte i hver pakke fra M_2 .

Der tages en tilfældig pakke fra dagens samlede produktion, og af denne pakke vælges en tilfældig skrue.

- a) Bestem sandsynligheden for, at skruen er defekt.

Eksempel 10 En dag på skydebanen bestemmer to lerdue-skytter sig for at gøre op, hvor stor en andel af de opsendte lerduer de hver især rammer. Skytte 1 rammer 72 % af sine lerduer, mens Skytte 2 rammer 82 % af sine lerduer. Tilsammen rammer de to skytter 78 % af det samlede antal opsendte lerduer.

- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt lerdue blev opsendt til Skytte 1.

En tabel med de givne oplysninger ser sådan ud

	Skytte 1 (S_1)	Skytte 2 (S_2)
Fordeling af lerduer		
Rammer plet (R)	0,72	0,82

De to tomme felter er $P(S_1)$ og $P(S_2)$. Det er $P(S_1)$, vi ønsker at bestemme.

Da en lerdue altid vil blive opsendt til enten Skytte 1 eller til Skytte 2, gælder der, at

$$P(S_1) + P(S_2) = 1, \text{ dvs. } P(S_2) = 1 - P(S_1).$$

Desuden er det oplyst, at $P(R) = 0,78$.

Ved hjælp af loven om total sandsynlighed får vi, at

$$P(R) = P(R|S_1) \cdot P(S_1) + P(R|S_2) \cdot P(S_2)$$

$$P(R) = P(R|S_1) \cdot P(S_1) + P(R|S_2) \cdot (1 - P(S_1))$$

$$0,78 = 0,72 \cdot P(S_1) + 0,82 \cdot (1 - P(S_1)).$$

Herefter kan $P(S_1)$ bestemmes ved at løse ovenstående ligning. Vi finder $P(S_1) = 0,40$.

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt lerdue blev opsendt til Skytte 1, er 40 %.

Opgave 12



Et trafikskelskab står for to busruter. Erfaringen viser, at der er forsinkelser på 7 % af afgangene på Rute 1, mens der er forsinkelser på 4 % af afgangene på Rute 2.

Trafikskelskabet oplyser, at der i en bestemt periode i alt har været forsinkelser på 5 % af alle afgange på de to ruter.

- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt afgang i perioden har været kørt på Rute 2.

Eksempel 11 På et bestemt stx-gymnasium går 46 % af eleverne til gymnasiefester.

39 % af eleverne på gymnasiet er 1.g'ere, og af dem går 60 % til gymnasiefester.

33 % af eleverne på gymnasiet er 2.g'ere, og af dem går 48 % til gymnasiefester.

- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt 3.g'er går til gymnasiefester.

Vi indfører hændelsen F : "Eleven går til gymnasiefester".

Vi ønsker altså at bestemme $P(F|3.g)$.

Andelen af 3.g'ere på gymnasiet er $100\% - 39\% - 33\% = 28\%$, dvs. $P(3.g) = 0,28$.

De givne oplysninger kan udtrykkes som $P(F) = 0,46$, $P(1.g) = 0,39$,

$$P(F|1.g) = 0,60, P(2.g) = 0,33 \text{ og } P(F|2.g) = 0,48.$$

Loven om total sandsynlighed giver nu, at

$$P(F) = P(F|1.g) \cdot P(1.g) + P(F|2.g) \cdot P(2.g) + P(F|3.g) \cdot P(3.g)$$

$$0,46 = 0,60 \cdot 0,39 + 0,48 \cdot 0,33 + P(F|3.g) \cdot 0,28.$$

Vi løser denne ligning og finder $P(F|3.g) = 0,24$.

Dvs. sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt 3.g'er går til gymnasiefester, er 24 %.

Opgave 13



Et forsikringselskab har tre telefonsælgere ansat til at sælge forsikringer.

Sælger 1 står for 20 % af det samlede antal opkald, Sælger 2 står for 35 %, og Sælger 3 står for de sidste 45 %.

Erfaringen viser, at Sælger 1 har succes med at få solgt en forsikring i 15 % af sine opkald, og Sælger 2 har succes i 22 % af sine opkald. Samlet har de tre sælgere succes med at få solgt en forsikring i 18 % af deres opkald.

- Opstil en tabel med de givne oplysninger, og indfør passende betegnelser for hændelserne.
- Bestem sandsynligheden for, at Sælger 3 har succes med at få solgt en forsikring i et af sine opkald.

Bayes' sætning

Som vi så i eksempel 5 og øvelse 3, har det betydning for udregningen af en betinget sandsynlighed, hvilken hændelse der er betinget af den anden. Det vil sige, at $P(A|B)$ ikke er det samme som $P(B|A)$.

Ønsker man at bestemme $P(A|B)$, når man kender $P(B|A)$, har man brug for Bayes' sætning.

Indholdet af Bayes' sætning illustreres ved igen at se på spiring af tulipanløg.

I et bed plantes to sorter af tulipanløg, hvor 60 % af løgene er af sorten Crown. Resten er af en anden sort. Spiringsprocenten for Crown-løg er 80 %. Den samlede spiringsprocent for alle løgene er 70 %.

Hændelsen A er "Løget er af sorten Crown".

Hændelsen B er "Løget spirer".

Vi kan oversætte oplysningerne til $P(A) = 60\%$, $P(B) = 70\%$ og $P(B|A) = 80\%$.

Vi ønsker nu at bestemme $P(A|B)$, dvs. sandsynligheden for, at et løg er af sorten Crown, givet at det spirer.

Derfor søger vi at udlede en formel til at bestemme $P(A|B)$, når vi kender $P(B|A)$.

Det følger af definitionen af betinget sandsynlighed, at $P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$.

Heraf fås $P(A \cap B) = P(A|B) \cdot P(B)$.

På tilsvarende måde kan vi finde frem til, at $P(B \cap A) = P(B|A) \cdot P(A)$.

Venstre side af de to ligninger er ens.

Derfor gælder $P(A|B) \cdot P(B) = P(B|A) \cdot P(A)$, hvoraf følger $P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}$.

Vi har hermed bevist Bayes' sætning for to hændelser A og B .

Sætning 3 Bayes' sætning

I et sandsynlighedsfelt (U, P) , hvor A og B er to vilkårlige hændelser, gælder

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B)}.$$

Ved hjælp af denne sætning kan vi nu bestemme $P(A|B)$, dvs. sandsynligheden for, at et løg er af sorten Crown, givet at det spirer

$$P(A|B) = \frac{0,80 \cdot 0,60}{0,70} = 0,69.$$

Eksempel 12 Farveblindhed er genetisk bestemt, og flere mænd end kvinder er farveblinde. Blandt danske mænd er 3,6 % farveblinde, mens det kun gælder for 0,2 % af kvinderne. Kvinder udgør 50,3 % af befolkningen og mænd 49,7 %.

En tilfældigt valgt person oplyser at være farveblind.

a) Hvad er sandsynligheden for, at personen er en mand?

Vi indfører hændelserne: K : kvinde, M : mand, F : farveblind og $\bar{F}$: ikke-farveblind. Hermed bliver de oplyste sandsynligheder

$$P(M) = 0,497, P(K) = 0,503, P(F|M) = 0,036 \text{ og } P(F|K) = 0,002.$$

Vi ønsker at bestemme $P(M|F)$.

Af Bayes' sætning fås
$$P(M|F) = \frac{P(F|M) \cdot P(M)}{P(F)}.$$

Da $P(F)$ ikke er direkte oplyst, må denne sandsynlighed først beregnes. Det gør vi ved hjælp af loven om total sandsynlighed

$$P(F) = P(F|M) \cdot P(M) + P(F|K) \cdot P(K) = 0,036 \cdot 0,497 + 0,002 \cdot 0,503 = 0,0189.$$

Herved fås, at
$$P(M|F) = \frac{P(F|M) \cdot P(M)}{P(F)} = \frac{0,036 \cdot 0,497}{0,0189} = 0,947.$$

Sandsynligheden for, at den farveblinde person er en mand, er derfor 94,7 %.

Øvelse 4 Om en tilfældigt valgt person vides, at vedkommende ikke lider af farveblindhed.

Fortsættelse af
eksempel 12

a) Bestem sandsynligheden for, at personen er en kvinde.

Eksempel 13 En fabrik har to maskiner, M_1 og M_2 , der producerer lysdioder. Sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt lysdiode fra den samlede produktion er defekt, er 7 %. 75 % af lysdioderne produceres af maskine M_1 , og 8 % af disse lysdioder er defekte.

Maskine	M_1	M_2
Andel	75 %	25 %
Defekte	8 %	

Der udtages tilfældigt en lysdiode fra den samlede produktion til kontrol. Lysdioden viser sig at være defekt.

a) Hvad er sandsynligheden for, at dioden er produceret på maskine M_1 ?

Bayes' sætning benyttes
$$P(M_1|\text{defekt}) = \frac{P(\text{defekt}|M_1) \cdot P(M_1)}{P(\text{defekt})} = \frac{0,08 \cdot 0,75}{0,07} = 0,86.$$

Altså er sandsynligheden 86 % for, at dioden er produceret på maskine M_1 .

b) Hvad er sandsynligheden for, at en lysdiode produceret af M_2 er defekt?

Her kan vi benytte loven om total sandsynlighed

$$P(\text{defekt}) = P(\text{defekt}|M_1) \cdot P(M_1) + P(\text{defekt}|M_2) \cdot P(M_2).$$

Ved indsættelse af talværdier giver dette $0,07 = 0,08 \cdot 0,75 + P(\text{defekt}|M_2) \cdot 0,25$.

Denne ligning løses med hensyn til $P(\text{defekt}|M_2)$, hvorefter fås

$$P(\text{defekt}|M_2) = 0,04 = 4\%.$$

Altså er sandsynligheden 4 % for, at en lysdiode produceret af M_2 er defekt.

Opgave 14



En fabrik producerer elpærer. Erfaringen viser, at 1,6 % af de producerede elpærer er defekte, og af dem stammer 43 % fra maskine M .
Maskine M står for 31 % af fabrikkens samlede produktion af elpærer.

- a) Bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt elpære er defekt, givet at den er blevet produceret på maskine M .

Mere om Bayes' sætning og loven om total sandsynlighed

I eksempel 12 og 13 blev Bayes' sætning anvendt sammen med loven om total sandsynlighed. Dette kan gøres mere generelt.

Se igen på figur 14 side 12 med de disjunkte hændelser $A_1, \dots, A_k$, hvor $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = U$, og hvor B er en hændelse. For at udregne sandsynligheden for A_i givet B kombinerer vi Bayes' sætning med loven om total sandsynlighed. For hver hændelse A_i gælder

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{P(B)} = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B | A_k) \cdot P(A_k)}.$$

Her har vi først brugt Bayes' sætning og derefter loven om total sandsynlighed.

Hermed har vi bevist Bayes' udvidede sætning.

Sætning 4 Bayes' udvidede sætning

Lad B være en hændelse i et sandsynlighedsfelt (U, P) , og lad $A_1, \dots, A_k$ være disjunkte hændelser, så $A_1 \cup A_2 \cup \dots \cup A_k = U$. Da gælder, at

$$P(A_i | B) = \frac{P(B | A_i) \cdot P(A_i)}{P(B | A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B | A_k) \cdot P(A_k)}.$$

Eksempel 14 I hver af 3 identiske æsker er der 4 kugler. Nedenstående tabel viser farvefordelingen af kuglerne i de 3 æsker.

	Æske 1	Æske 2	Æske 3
Hvide	1	2	4
Røde	3	2	0

Der vælges nu en tilfældig æske, og fra denne æske vælges tilfældigt en kugle. Den trukne kugle viser sig at være hvid.

- a) Hvad er sandsynligheden for, at det var æske 2, der blev valgt?

$\mathcal{A}_1$, $\mathcal{A}_2$, $\mathcal{A}_3$ og Hvid er oplagte navne på fire hændelser.

Vi ønsker at bestemme den betingede sandsynlighed $P(\mathcal{A}_2 | \text{Hvid})$.

Ifølge Bayes' udvidede sætning er

$$\begin{aligned} P(\mathcal{A}_2 | \text{Hvid}) &= \frac{P(\text{Hvid} | \mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{A}_2)}{P(\text{Hvid} | \mathcal{A}_1) \cdot P(\mathcal{A}_1) + P(\text{Hvid} | \mathcal{A}_2) \cdot P(\mathcal{A}_2) + P(\text{Hvid} | \mathcal{A}_3) \cdot P(\mathcal{A}_3)} \\ &= \frac{\frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3}}{\frac{1}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} + \frac{4}{4} \cdot \frac{1}{3}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{1}{12} + \frac{2}{12} + \frac{4}{12}} = \frac{\frac{2}{12}}{\frac{7}{12}} = \frac{2}{7}. \end{aligned}$$

Eksempel 15 En indledende undersøgelse viser, at en person enten lider af sygdom A_1 eller af sygdom A_2 , men ikke af begge sygdomme samtidigt.
 Det betyder, at hændelserne A_1 og A_2 er disjunkte og $A_1 \cup A_2 = U$.
 Det oplyses, at $P(A_1) = 0,80$ og $P(A_2) = 0,20$.
 Der tages en blodprøve, der kan vise enten resultatet B eller resultatet $\bar{B}$.
 Hvis personen lider af sygdom A_1 , er sandsynligheden 0,90 for, at blodprøven viser B .
 Hvis personen lider af sygdom A_2 , er sandsynligheden 0,30 for, at blodprøven viser B .
 Blodprøven viser B .

a) Hvad er sandsynligheden for, at personen lider af sygdom A_1 ?

Vi har fået oplyst $P(A_1)$ og $P(A_2)$ samt $P(B|A_1) = 0,90$ og $P(B|A_2) = 0,30$. Derfor fås ved indsættelse i Bayes' udvidede sætning

$$P(A_1|B) = \frac{0,90 \cdot 0,80}{0,90 \cdot 0,80 + 0,30 \cdot 0,20} = 0,923.$$

Altså er sandsynligheden 92,3 % for, at personen lider af sygdom A_1 .

Øvelse 5

Fortsættelse af eksempel 15

a) Bestem $P(A_2|B)$.

b) Undersøg, om $P(A_1|B) + P(A_2|B) = 1$, og kommentér resultatet.

Opgave 15



Et supermarkedet får leveret økologiske æbler fra tre forskellige plantager A , B og C .
 30 % af æblerne er fra A , 50 % fra B og 20 % fra C .
 3 % af æblerne fra A er ormstukne, 5 % fra B og 2 % fra C . Alle de leverede æbler blandes i én kasse.

En kunde tager tilfældigt et æble fra kassen. Æblet er ormstukkent.

a) Hvad er sandsynligheden for, at æblet stammer fra plantage C ?

Opgave 16



En pose indeholder 200 blomsterfrø, hvor 120 af frøene er af arten A , og 80 af frøene er af arten B . Et frø af arten A spirer med sandsynlighed 85 %, og et frø af arten B spirer med sandsynlighed 75 %. Der vælges tilfældigt et frø fra posen.

a) Bestem sandsynligheden for, at frøet ikke vil spire.

Et sået frø observeres at spire.

b) Bestem sandsynligheden for, at det er af arten B .

Øvelse 6

Gennem et fiberkabel sendes information i form af bits, der kan have værdien 0 eller 1. Der er imidlertid støj på linjen, så et udsendt 0 vil med sandsynligheden $1/10$ under transmission blive ændret til 1.

Et udsendt 1 vil med sandsynligheden $1/5$ under transmission blive ændret til et 0. Sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt bit er udsendt med værdien 0, er $2/3$.

Der modtages en bit med værdien 0.

a) Hvad er sandsynligheden for, at den modtagne bit blev udsendt med værdien 0?

Der modtages en bit med værdien 1.

b) Hvad er sandsynligheden for, at den modtagne bit blev udsendt med værdien 1?

Definition 6 Sensitivitet og specificitet ved test for en sygdom

Ved test for en sygdom taler man om testens *sensitivitet*, der angiver sandsynligheden for, at man tester positivt (+), givet at man har sygdommen (S). Sensitiviteten af en test angiver derfor den betingede sandsynlighed $P(+|S)$.

Ved *specificiteten* af testen forstås sandsynligheden for, at man tester negativt (-), givet at man ikke har sygdommen ($\bar{S}$). Specificiteten af en test angiver derfor den betingede sandsynlighed $P(-|\bar{S})$.

Eksempel 16 Test for en sygdom

Sandsynligheden for, at en tilfældigt valgt person i befolkningen på et givet tidspunkt har sygdommen S , er $P(S)$.

En person tager testen, som viser positiv. Sandsynligheden for at teste positivt, uanset om man har sygdommen eller ej, er ifølge loven om total sandsynlighed

$$P(+) = P(+|S) \cdot P(S) + P(+|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}).$$

Sandsynligheden $P(S|+)$ for, at personen har sygdommen, givet at testen er positiv ("sand positiv"), findes ved hjælp af Bayes' sætning

$$P(S|+) = \frac{P(+|S) \cdot P(S)}{P(+|S) \cdot P(S) + P(+|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}.$$

Eksempel 17 En test for en bestemt sygdom har sensitivitet 0,9 og specificitet 0,88. Det vides, at 3 % af befolkningen lider af sygdommen. En person bliver testet, og testen viser positiv. Fra det oplyste har vi, at

$P(+|S) = 0,9$, $P(-|\bar{S}) = 0,88$ og $P(S) = 0,03$. Desuden har vi, at

$P(\bar{S}) = 1 - P(S) = 1 - 0,03 = 0,97$ og $P(+|\bar{S}) = 1 - P(-|\bar{S}) = 1 - 0,88 = 0,12$.

Sandsynligheden for, at personen faktisk har sygdommen, er derfor ifølge Bayes' udvidede sætning

$$P(S|+) = \frac{P(+|S) \cdot P(S)}{P(+|S) \cdot P(S) + P(+|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})} = \frac{0,9 \cdot 0,03}{0,9 \cdot 0,03 + 0,12 \cdot 0,97} = 0,188.$$

Sandsynligheden for, at personen har sygdommen, givet at testen var positiv, er derfor 18,8 %.

Ved at gennemføre et argument som ovenfor fås, at sandsynligheden for, at en person ikke har sygdommen, givet at personen tester negativt ("sand negativ"), er

$$P(\bar{S}|-) = \frac{P(-|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(-|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) + P(-|S) \cdot P(S)} = \frac{0,88 \cdot 0,97}{0,88 \cdot 0,97 + 0,10 \cdot 0,03} = 0,996.$$

Opgave 17

En bestemt type kviktest for Covid-19 har sensitivitet 0,70 og specificitet 0,997.

En person A tager kviktesten, og den viser positiv.

Det oplyses, at 2 % af befolkningen på testtidspunktet har Covid-19.

a) Bestem sandsynligheden for, at A har Covid-19.

En anden person B tager også kviktesten, og den viser negativ.

b) Bestem sandsynligheden for, at B ikke har Covid-19.

- Øvelse 7** En bestemt type kviktest for Covid-19 har en sensitivitet på 0,75 og en specificitet på 0,993. Andelen af befolkningen, der på testtidspunktet har Covid-19, betegnes x .
- Tegn grafen for $P(S|+)$ som funktion af x .
 - Benyt grafen til at afgøre, om kviktesten er mest pålidelig til at påvise sygdommen, når sygdommen er lidt eller meget udbredt i befolkningen.

Det er nemt at komme til at forveksle betingede sandsynligheder. Ved test for en sygdom optræder fx de to betingede sandsynligheder $P(\bar{S}|+)$ og $P(+|\bar{S})$. Det første udtryk beskriver sandsynligheden for ikke at have sygdommen, selv om testen viste positiv, mens det andet udtryk beskriver sandsynligheden for, at testen viser positiv, selv om man ikke har sygdommen. I det første tilfælde har man sikker viden om, at testen viser positivt resultat, og man er interesseret i sandsynligheden for, at det, testen viser, er forkert. I det andet tilfælde er der sikker viden om, at man ikke har sygdommen, og man undersøger sandsynligheden for, at testen på denne baggrund viser forkert.

Ombytning af rækkefølgen af A og B i den betingede sandsynlighed $P(A|B)$ kan have store konsekvenser ved retssager, hvilket følgende tænkte eksempel viser.

Eksempel 18 Anklagerens fejltagelse

I en by med 20000 indbyggere er der begået en forbrydelse. På gerningsstedet finder politiet blod, som med sikkerhed tilhører gerningsmanden. Kun 1 ud af 100 personer vil have et match til den fundne blodtype. Andre indicier viser, at gerningsmanden må være fra byen. En formodet gerningsmand anholdes, og hans blodtype passer med den fundne ("").

Anklageren hævder nu, at den anholdte med stor sandsynlighed er skyldig (S), for hvis den anholdte person var uskyldig ($\bar{S}$), ville der kun være en sandsynlighed på 1/100 for at finde en matchende blodtype på gerningsstedet.

Derved begår anklageren en fejl, for han taler i virkeligheden om sandsynligheden $P(+|\bar{S}) = 1/100$. Det er sandsynligheden for at finde en matchende blodtype, givet en uskyldig person.

Imidlertid er det sandsynligheden $P(\bar{S}|+)$, der er den relevante. $P(\bar{S}|+)$ er sandsynligheden for, at den anholdte er uskyldig, givet at der var et match i blodtypen. Ved hjælp af Bayes' udvidede sætning kan $P(\bar{S}|+)$ beregnes, idet

$$P(\bar{S}|+) = \frac{P(+|\bar{S}) \cdot P(\bar{S})}{P(+|\bar{S}) \cdot P(\bar{S}) + P(+|S) \cdot P(S)}.$$

Da $P(S) = \frac{1}{20\,000}$, $P(\bar{S}) = \frac{19\,999}{20\,000}$, $P(+|S) = 1$ og $P(+|\bar{S}) = \frac{1}{100}$, fås

$$P(\bar{S}|+) = \frac{\frac{1}{100} \cdot \frac{19\,999}{20\,000}}{\frac{1}{100} \cdot \frac{19\,999}{20\,000} + 1 \cdot \frac{1}{20\,000}} = 0,995.$$

Der er således meget stor sandsynlighed for, at den anholdte er uskyldig (medmindre der er andre beviser).

Også forsvaret kan bevidst eller ubevidst begå fejl ved retssager, når det drejer sig om korrekt behandling af betingede sandsynligheder. Her vil fejlen typisk være ikke at inddrage alle kendte faktorer, når man opstiller den betingede sandsynlighed for, at en person er skyldig. Dermed undervurderes sandsynligheden for skyld.

Selv om sandsynlighedsregning sjældent kan stå alene, når der skal træffes vigtige beslutninger, så har fx Bayes' sætning (som det forhåbentlig er fremgået af dette forberedelsesmateriale) mange konkrete og vigtige anvendelser i bl.a. naturvidenskab, medicin og jura.

Indstiksark til formelsamlingen

Udfaldsrum U med n udfald	F(1)	$U = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$
Hændelse A med k udfald fra U	F(2)	$A = \{a_1, a_2, \dots, a_k\}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(3)	$P(A) = P(a_1) + P(a_2) + \dots + P(a_k)$
<i>Symmetrisk sandsynlighedsfelt</i>		
Alle sandsynligheder er lige store	F(4)	$P(u_1) = P(u_2) = \dots = P(u_n) = \frac{1}{n}$
Sandsynlighed for hændelse A	F(5)	$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{antal gunstige}}{\text{antal mulige}}$
<i>Regneregler i sandsynlighedsfelt</i>		
Sandsynlighed for komplementærhændelsen $\bar{A}$ til A	F(6)	$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$
Sandsynlighed for foreningshændelse	F(7)	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
<i>Betinget sandsynlighed</i>		
Definition på betinget sandsynlighed	F(8)	$P(A B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$
Loven om total sandsynlighed	F(9)	$P(B) = P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)$
Bayes' sætning	F(10)	$P(A B) = \frac{P(B A) \cdot P(A)}{P(B)}$
Bayes' udvidede sætning	F(11)	$P(A_i B) = \frac{P(B A_i) \cdot P(A_i)}{P(B A_1) \cdot P(A_1) + \dots + P(B A_k) \cdot P(A_k)}$

