

Matematik aflevering 16

William & Moe

opg 1

a) Bestem $\int (x^2 + 3)^2 \cdot 4x \, dx$

Vi bruger integration ved substitution

i: $g(x) = t = x^2 + 3$

y: x^2

Vi finder dx

$$\frac{dt}{dx} = (x^2 + 3) = 2x$$

$$dx = \frac{dt}{2x} = \frac{1}{2x} dt$$

Vi indsætter t og dx

$$\int t^2 \cdot 4x \cdot \frac{1}{2x} dt$$

$$= \int t^2 \cdot \frac{4x}{2x} dt$$

$$= \int t^2 \cdot 2 \, dt$$

$$= \frac{2}{3} t^3 + k$$

Vi substituere t tilbage

$$= \frac{2}{3} (x^2 + 3)^3 + k$$

Herved er $\int (x^2 + 3)^2 + 4x \, dx = \frac{2}{3} (x^2 + 3)^3 + k$

OPGAVE 2:

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin(2x) + 3x + 4$$

a) Gør rede for, at f er en voksende funktion

Vi differentiere ved hjælp af kædereglen $(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

$$f(x) = \sin(x) + 3x + 4 \quad g(x) = 2x$$

$$f'(x) = \cos(x) + 3 \quad g'(x) = 2$$

$$f'(x) = \cos(2x) \cdot 2 + 3 \quad \checkmark$$

I skal være specifikke med hvad det er I differentiere vha. kædereglen. Her er det $\sin(2x)$ ikke hele funktionen

Vi ved at differentialkvotienten skal være større end 0 for at f er en voksende funktion. $\checkmark$

Den mindste værdi for $\cos(x)$ er -1 , og derfor vil

$$f'(x) > 0 \quad \text{da} \quad (-1) \cdot 2 + 3 = 1 \quad \checkmark$$

Da $1 > 0$, vil f være en voksende funktion. $\checkmark$

Opgave 3 - Emilie og Tenja

En funktion f er bestemt ved $f(x) = 3 \cdot e^x + 2$

a) Bestem den stamfunktion til funktionen f , hvis graf har linjen med ligningen $y = 5x + 7$ som tangent.

Vi aflaser tangentholdningen til 5 og opsætter derfor

ligningen $F'(x) = 5$ ✓

Finder $F(x)$

$$F(x) = \int 3e^x + 2 \, dx = 3e^x + 2x + k \quad \checkmark$$

Vi ved at $F'(x) = f(x)$ og ligningen lyder derfor

$$5 = 3 \cdot e^x + 2$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = 3 \cdot e^x - 3$$

$\Leftrightarrow$

$$0 = 3e^0 - 3$$

$\Leftrightarrow$

$$x = 0$$

$$a^0 = 1 \quad \checkmark$$

Jeg ville nok sige

$$3 = 3e^x$$

$$\Leftrightarrow 1 = e^x$$

$$x = 0$$

$F(x)$ har derfor tangenten ved $x = 0$

Vi ved at $y = 5x + 7$ ved $x = 0$ har y -værdien 7

Så må $F(0) = 7$

Vi isolerer nu k i $F(0) = 7$

$$3e^0 + 2 \cdot 0 + k = 7 \quad \checkmark$$

$\Leftrightarrow$

$$3 + k = 7$$

$\Leftrightarrow$

$$k = 4$$

k indsættes i stamfunktionen

$F(x) = 3e^x + 2x + 4$ er derfor stamfunktionen til f , hvis graf

har linjen med ligningen $y = 5x + 7$ som tangent ✓

I et kushjørne ligger en udbygning hvis grundplan har form som en kvadrant med radius 2m. En 5m lang stige placeres, så den rører de to vægge i A og B samtidig med, at den rører udbygningen i D. Afstanden fra A til D betegnes c .

a) gør rede for at $\frac{z}{c} = \frac{5-c}{z}$

På figuren ses at vinklerne $\angle$ i de to trekanter er ens, så derfor vil forholdene mellem trekanternes sider også være ens. Vi kan se at $5-c$ er den længste katete på den store trekant, z er den længste katete på den lille, så forholdet mellem de længste kateter vil kunne beskrives som

$$\frac{5-c}{z}$$

De korteste kateter vil være c i den lille trekant, z i den store, og forholdet vil altså være

$$\frac{z}{c}$$

Da forholdene mellem siderne er ens er ✓

$$\frac{5-c}{z} = \frac{z}{c}$$

Når vi står mellem trekanter bruger vi siden $|AD|$ i trekant

ACD osv., ellers er det svært at regne ud.

hvilke sider I tager ud

b) bestem de mulige værdier af c

Vi omskriver udtrykket fra a, så det får form som
2. grads polynomium

$$\frac{2}{c} = \frac{5-c}{2}$$

(✓)

ligning

$$2 = \frac{5-c}{2} \cdot c$$

$$4 = (5-c) \cdot c$$

$$4 = -c^2 + 5c$$

$$0 = -c^2 + 5c - 4$$

Vi bruger diskriminantformlen givet ved $d = b^2 - 4ac$ hvor
 $a = -1$, $b = 5$, $c = -4$

Værdierne indsættes!

$$d = 5^2 - 4 \cdot (-1) \cdot (-4) \\ = 25 - 16 = 9$$

Da $d > 0$ har ligningen to løsninger, hvilket betyder at

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Værdierne indsættes!

$$c_1 = \frac{-5 + \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-2}{-2} = 1$$

$$c_2 = \frac{-5 - \sqrt{9}}{2 \cdot (-1)} = \frac{-8}{-2} = 4$$

De mulige værdier af c er $c_1 = 1$ og $c_2 = 4$

Opg. 5

Nielsen

Figuren viser grafen for funktionen f givet ved $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 4$

a) Bestem $f(2,3)$

Vi løser $f(x,y)$ når $x=2$ og $y=3$

$$f(2,3) = 2^2 + 2 \cdot 3^2 - 4 = 4 + 18 - 4 = 18$$

$$f(2,3) = 18$$

bestemmer

b) Bestem koordinatpunkterne til hvert af de skæringspunkter mellem grafen for f og x -aksen

Vi ved at f skærer x -aksen når $y=0$ og $z=0$

Vi isolerer nu x i $f(x,y)$ når $y=0$ og $z=0$

$$0 = x^2 + 2 \cdot 0^2 - 4$$

$$0 = x^2 - 4$$

$$4 = x^2$$

$$\pm \sqrt{4} = x \Leftrightarrow x=2 \vee x=-2$$

Vi opskriver skæringspunkterne med x -aksen

$P_1(2,0,0)$ og $P_2(-2,0,0)$

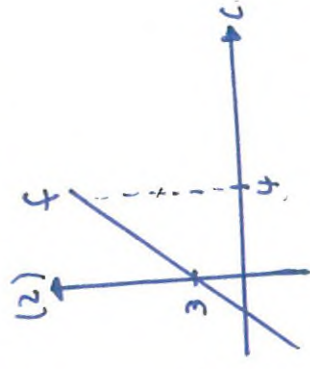
Skæringspunkterne mellem grafen for f og x -aksen er $P_1(2,0,0)$ og $P_2(-2,0,0)$

Opgabe 6

Om en lineær funktion f

oplyses det, at $f(0) = 3$ og

$\int_0^4 f(x) dx = 24$. Figuren viser grafen for f



a) Bestem en forskrift for f

vi ved, at f er en funktion af typen $f(x) = ax$

hvor a er hældningskoefficienten og b er grafens skæring med y -aksen. Vi ved, at

$f(0) = 3$ og at grafen for f hermed skærer y -aksen i punktet $(0, 3)$, så $b = 3$.

Vores forskrift indtil videre er nu

$f(x) = ax + 3$, og vi ved, at $\int_0^4 f(x) dx = 24$ ✓

$\Leftrightarrow \int_0^4 ax + 3 dx = 24$. Vi bestemmer det bedste

te integral og finder a :

$$\int_0^4 ax + 3 dx = 24 \Leftrightarrow \left[\frac{1}{2} ax^2 + 3x \right]_0^4 = 24$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2} a \cdot 4^2 + 3 \cdot 4 - \left(\frac{1}{2} a \cdot 0^2 + 3 \cdot 0 \right) = 24 \Leftrightarrow \frac{1}{2} a \cdot 16 + 12 = 24$$

$$\Leftrightarrow 8a = 12 \Leftrightarrow a = 1,5$$

Forskriften for f er $f(x) = 1,5x + 3$ ✓

Opgave 7 - Fredrik + Gustav

$$f(x, y) = a \cdot x^2 \cdot y - x^3 - b \cdot y, \text{ hvor } a \text{ og } b \text{ er konstanter}$$

f har et stationært punkt i $P(2, 1, f(2, 1))$

a) Konstanterne a og b bestemmes ved at bestemme gradienten

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2ay \cdot x - 3x^2 \\ ax^2 - b \end{pmatrix}$$

Da for et stationært punkt $P(x, y)$ er gradienten lig nulvektoren $\nabla f(x, y)$, bestemmes konstanterne a og b ved at indsatte det stationære punkts x - og y -koordinater i gradienten, som sættes lig nulvektoren

$$\nabla f(2, 1) = \begin{pmatrix} 2a \cdot 1 \cdot 2 - 3 \cdot 2^2 \\ a \cdot 2^2 - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4a - 12 \\ 4a - b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Ligningen $4a - 12 = 0$ løses, da den kun består af én variabel

$$4a - 12 = 0$$

$$4a = 12$$

$$a = 3$$

$a = 3$ indsættes i ligningen $4a - b = 0$ og b bestemmes

$$4 \cdot 3 - b = 0$$

$$b = 12$$

Forskriften for f er altså $f(x, y) = 3x^2 \cdot y - x^3 - 12y$

Dette er ikke konklusionen, da I skulle bestemme a og b er det resultaterne ovenfor.

Opgave 8 - del 1

Camilla og
Christa

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3$.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen intervallet $0 \leq x \leq 2$ et område M_1 .

a) Bestem arealet af området M_1 .

Vi regner det bestemte integrale af $f(x)$ i intervalle $[0, 2]$.

$$\begin{aligned} A(M_1) &= \int_0^2 f(x) dx = \int_0^2 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_0^2 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 2^4 - \frac{1}{4} \cdot 0^4 \\ &= \frac{1}{4} \cdot 16 = \underline{\underline{4}} \end{aligned}$$

Arealet af M_1 er 4.

En anden figur viser grafen for f og en trekant OPQ . Koordinaterne for punkterne O , P og Q fremgår af figuren.

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen i intervallet $0 \leq x \leq k$ et område M_2 .

b) Gør rede for, at arealet af området M_2 er halvt så stort som arealet af trekant OPQ .

Vi vil gerne først bestemme arealet af trekant OPQ .

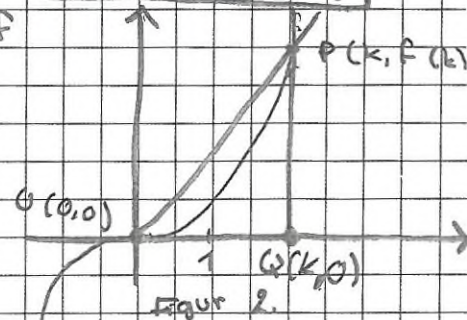
Arealet af en trekant har formelen

$$A = \frac{1}{2} \cdot h \cdot g$$

Vi opstiller et udtryk for arealet af trekanten OPQ .

Hvor $h = f(k)$ og $g = k$

$$\begin{aligned} A(OPQ) &= \frac{1}{2} \cdot f(k) \cdot k \\ &= \frac{1}{2} \cdot k^3 \cdot k \\ &= \frac{1}{2} \cdot k^4 = \frac{k^4}{2} \end{aligned}$$



Vi bestemmer nu arealet af M_2 ved at bestemme det bestemte integrale af $f(x)$ med grænserne $[0, k]$.

$$\begin{aligned} A(M_2) &= \int_k^0 f(x) dx = \int_k^0 x^3 dx \\ &= \left[\frac{1}{4} x^4 \right]_k^0 = \frac{1}{4} \cdot 0^4 - \frac{1}{4} \cdot k^4 \\ &= -\frac{k^4}{4} \end{aligned}$$

I har byttet rundt på grænserne i integral

→ (✓)

Opgave 8 - del 2

Da $A(OPQ) = \frac{k^4}{2}$ og $A(M_2) = \frac{k^4}{4}$, kan vi
at $A(M_2)$ er halvt så stort som $A(OPQ)$.



Opgave 1

Opg 10 - GUSTAV A OG FREDERIK - 3.E MAT - DEN FLOTTESTE
OPGAVE I MANDS MINDE

To funktioner gived ved henholdsvis: $f(x) := 6 \cdot x - x^2$ • Udført og
 $g(x) := k \cdot x | 0 < k < 6$ • Udført

a) bestem for $k=2$, koordinatsættene til skæringspunkterne mellem graferne for f og g

Her løser vi $f(x)=g(x)$, hvor at $k=2$ og finder de tilhørende x -værdier

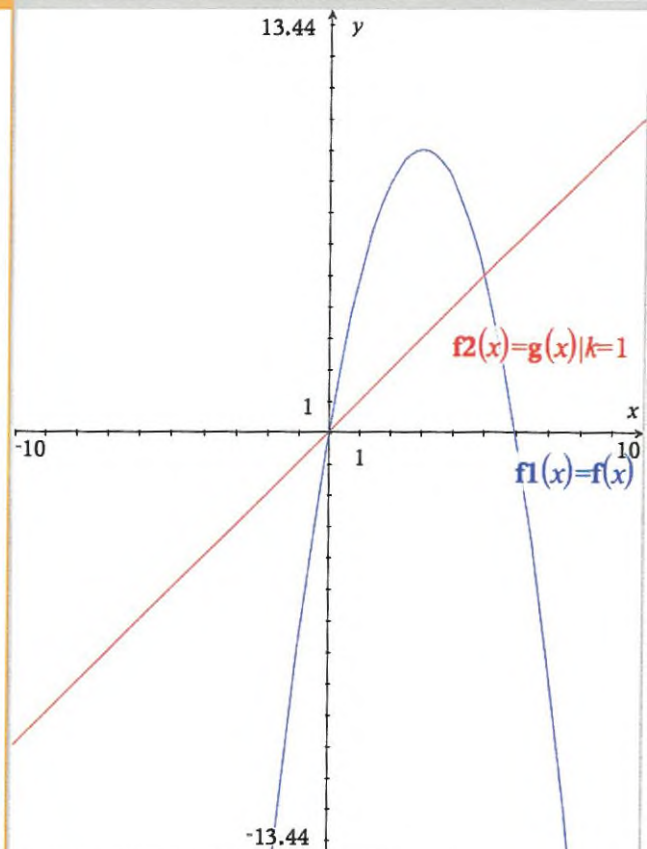
$\text{solve}(f(x)=g(x)|k=2,x)$ • $x=0$ or $x=4$ ✓

Dette er de $x=2$ og $x=4$, vi finder nu de tilhørende y -værdier ved at indsætte i en vilkårlig af funktionerne

Vi gør det i $f(x)$: $f(0) = 0$ $f(4) = 8$ og for at vise det også gælder for $g(x)$ med $k=2$: $g(0)|k=2 = 0$ $g(4)|k=2 = 8$ ✓

Altså skær de i koordinatsættene: $(0,0)$ og $(4,8)$

Skæringspunkterne mellem graf-erne for f og g er...



b) I første kvadrant afgrænser graferne et areal M , bestem k , så at arealet af M er lig 18

Vi kan herse at grænsen $(0,0)$ er altid 0, ligegyldig hvad k er

Så finder vi et udtryk for vores 2. grænse udtrykt ved k , hvor at $x > 0$ for at finde 2. grænse

$\text{solve}(f(x)=g(x),x)|x>0$ and $6>k>0$ • $x=-(k-6)$ and $0<k<6$ ✓

Her får vi at 2. grænsen er givet ved $x=-(k-6)$

Så indsætter vi det i vores udtryk for arealet, hvor vi stiller det op på formen:

$M = \int_a^b (f(x) - g(x)) dx$ hvor at $f(x)$ er den øverste funktion ✓

Her indsætter vi så det med vores grænser værende: $x=0$ og $x=-(k-6)$, og sætter det lig 18 og løser for k

$M = \text{solve} \left(\int_0^{-(k-6)} (f(x) - g(x)) dx = 18, k \right)$ • $k = 1.2378$ ⚠ ✓

Så får vi altså k til at være lig med 1.2378 for at arealet mellem dem bliver 18, som vi også kan se ved

M når at $k=1.2378$: $\int_0^{-(1.2378-6)} (f(x) - g(x)) dx | k=1.2378 = 18$. ✓

Altså kan vi se at $k=1.2378$ for at arealet M er lig 18

Opgave 1

opg 11

i Ecuador har 1.6 af kvægbestanden sygdommen brucellose. en bestemt test for brucellose viser positiv 65% de gange, hvor koen har sygdommen, mens testen viser positiv 1.1%, af de gange, hvor koen ikke har sygdommen.

a) bestem sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt ko testes positiv

her kan vi bruge loven om total sandsynlighed

de givne oplysninger er og de vi kalder dem er

$P(B)$, som svarer til 1.6% af kvægbestanden har den sygdom

$P(\text{positiv}|B)$, som svarer til 65%. det er sandsynligheden for en ko har sygdommen, så vil den teste positiv 65% af gangene

$P(\text{positiv}|B^c)$, som svarer til 1.1%. det er sandsynligheden for, hvis en ko ikke har sygdommen, at den stadig vil teste positiv

fordi der bliver testet blandt de raske køer, skal vi sortere de syge køer fra det udtrykkes sådan.

$P(B^c) = 1 - P(B) = 98.4\%$

loven for totalsandsynlighed ser således ud $P(A) = P(A|B) \cdot P(B) + P(A|B^c) \cdot P(B^c) \dots$

indsætter i formelen

$$p(\text{positiv}) = 0.65 \cdot 0.016 + 0.011 \cdot 0.984 \rightarrow p(\text{positiv}) = 0.021224$$

dvs. sandsynligheden for at tilfældigt udvalgt ko tester positiv for brucecekocelc er 2.1%

✓ Opgaven er løst korrekt, men hændelserne mangler at blive indført.

b) bestem sandsynligheden for at en ko har brucellose givet at den er teste positiv.

vi kan bruge bayes sætning

bayes sætning i vores tilfælde ser sådan ud

$$P(B|\text{positiv}) = \frac{P(\text{positiv}|B)P(B)}{P(\text{positiv})}$$

indsætter

$$P(B|\text{positiv}) = \frac{0.65 \cdot 0.016}{0.021} \rightarrow 0.495238$$

Sandsynligheden for, at en ko faktisk har brucellose, givet at den har testet positiv, er ca. 49%

Opgave 1

Opgave 12 - Rosa og Emma

OBS: Vektorer angives uden vektorpile ✓

En vektorfunktion s er givet ved $s(t) := \begin{bmatrix} t^3 - 3 \cdot t^2 - t + 8 \\ t + 4 \end{bmatrix}$ • Udført

a) Bestem hastighedsvektoren $v = s'(1)$

For at bestemme hastighedsvektoren $v(t)$ bestemmer vi $s'(t)$ ✓

$$v(t) = sm(t) := \frac{d}{dt}(s(t)) \text{ • Udført}$$

Vi bestemmer nu $v(1)$

$$v(1) = sm(1) \text{ • } \begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

Hastighedsvektoren til parameterværdien $t=1$ er $\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}$ ✓

b) Bestem den spidse vinkel mellem v og vandret

Vi benytter her formel (52) i formel samling til bestemmelse af vinkler mellem vektorer

$$v = \cos^{-1} \left(\frac{\text{dotP} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)}{\text{norm} \left(\begin{bmatrix} -4 \\ 1 \end{bmatrix} \right) \cdot \text{norm} \left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)} \right) \text{ • } v = 2.89661$$

Vinkel mellem hastighedsvektoren og vandret er 2.897 radianer.

hvor kommer denne vektor fra, indfør en vandret vektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ som vi bestemmer vinklen mellem

den og hastigheds

En ret linje har ligningen $-3x + 13y + c = 0$, hvor c er et tal.

c) Bestem de to værdier af c , hvor linjen l er tangent til banekurven for s .

Vi aflæser en normalvektor i linjen, da linjen er givet ved formel (67) i FS

$$n := \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \end{bmatrix} \text{ • } \begin{bmatrix} -3 \\ 13 \end{bmatrix}$$

Vi finder ud ved hvilke t -værdier normalvektoren for linjen og tangentvektoren er ortogonale og derved ved hvilke t -værdier linjen og tangentvektoren er parallelle. Vi ved at skalarproduktet mellem normalvektoren og tangentvektoren her skal være 0 og derfor bruger vi N-spirekommandoen solve. til at

$$\text{solve}(\text{dotP}(sm(t), n) = 0, t) \text{ • } t = \frac{-2}{3} \text{ or } t = \frac{8}{3} \quad \checkmark$$

Vi indsætter de fundne t -værdier i $s(t)$

$$s\left(\frac{-2}{3}\right) \text{ • } \begin{bmatrix} 7.03704 \\ 3.33333 \end{bmatrix} \quad \checkmark$$

$$s\left(\frac{8}{3}\right) \text{ • } \begin{bmatrix} 2.96296 \\ 6.66667 \end{bmatrix}$$

Vi har nu 2 x -værdier og 2 y -værdier, som vi kan indsætte i linjen og isolere c .

$$\text{solve}(-3 \cdot 7.03704 + 13 \cdot 3.33333 + c = 0, c) \text{ • } c = -22.2218$$

$$\text{solve}(-3 \cdot 2.96296 + 13 \cdot 6.66667 + c = 0, c) \text{ • } c = -77.7778$$

De to c -værdier, der gør at linien l er tangent til banekurven for s , er $c = -22.2218$ og $c = -77.7778$.

-vektoren

skriv formelsamlingen

til at løse ligningen

s ligningen

for at sikre linjen går hhv. det ene og det andet punkt.

Opgave 1

I en model (model 1) beskriver man udviklingen i jorden befolkningstal ved differentialligningen

$$p' = 0.015 \cdot p^{1.2}$$

hvor $p(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990. I 1990 var befolkningstallet 5,28 mia.

a) Med hvilken hastighed voksede befolkningstallet i 1990 ifølge modellen?

Sætter 5,28 ind på p 's plads i differentialligningen: ✓

$$p' = 0.015 \cdot (5.28)^{1.2} \rightarrow 0.110472$$

Den hastighed befolkningstallet voksede med i 1990 er 0,11 mia. mennesker pr år ifølge modellen. ✓

b) Bestem befolkningstallet i 2030 ifølge modellen.

Bruger desolve-kommandoen, indsætter differentialligningen og begyndelsesbetingelsen $p(0)=5,28$: ✓

$$\text{deSolve}(p' = 0.015 \cdot p^{1.2} \text{ and } p(0) = 5.28, x, p) \rightarrow p = \frac{-4.11523 \times 10^{12}}{(x - 238.975)^5}$$

$$\text{Definerer funktionen } p(x) := \frac{-4115230000000}{(x - 238.975)^5} \rightarrow \text{Udført} \quad \checkmark$$

Sætter nu 40 ind på x 'ets plads i formlen, da 2030 er 40 år efter startåret 1990:

$$p(40) \rightarrow 13.1948$$

Befolkningstallet i 2030 er 13.19 mia. ifølge modellen. ✓

I en anden model (model 2) beskrives jordens befolkningstal ved forskiften

$$f(x) = 5.28 \cdot e^{0.015 \cdot x}$$

hvor $f(x)$ er befolkningstallet (målt i mia.) x år efter 1990.

c) I hvilket år vil befolkningstallet blive 50% større ifølge model 1 end det vil blive ifølge model 2? ✓

Sætter $p(x)$ lig med $1.5 \cdot f(x)$ og isolerer x :

$$\text{solve}(p(x) = 1.5 \cdot f(x), x) \rightarrow x = -295.075 \text{ or } x = 48.3915 \quad \triangle$$

Da x (antal år efter 1990) ikke kan være negativt må året hvor befolkningstallet i model 1 er 50% større end befolkningstallet i model 2 være 2038

ifølge de to modeller. ✓

Opgave 14

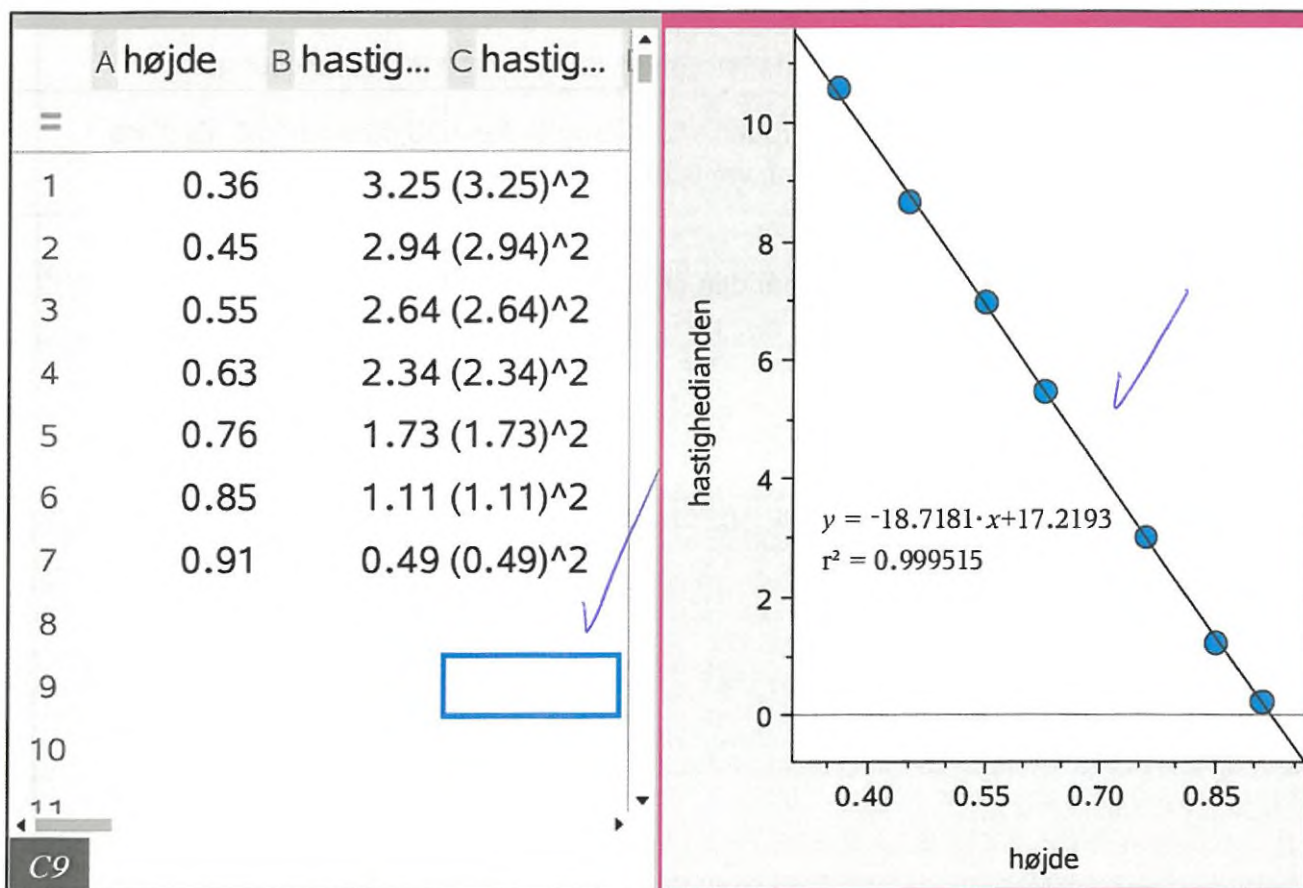
Opgave 14

I en sporthal har nogle elever målt sammenhørende værdier af hastigheden og højden over gulvet for en basketball, der springer op efter at have ramt gulvet. Tabellen viser elevernes målinger. Tabel på næste side

I en model er der en lineær sammenhæng mellem g og v^2 givet ved

$$v^2 := a \cdot h + b$$

hvor v betegner boldens hastighed (målt i meter pr. sekund), og h betegner boldens højde over gulvet (målt i meter)



a) Vi skal benytte tabellens data til at bestemme tallen a og b.

stat.results ▶	"Titel"	"Lineær regression (mx+b)"
	"RegEqn"	"m·x+b"
	"m"	-18.7181
	"b"	17.2193
	"r ² "	0.999515
	"r"	-0.999757
	"Resid"	"{...}"

Vi aflæser vores a og b

a:=stat.m ▶ -18.7181

b:=stat.b ▶ 17.2193

altså må starthastigheden i anden være -18,72 og hastigheden i anden bolden falder med 17,22 %

konklusionen er $a = -18,72$ og $b = 17,22$.

Der mangler noget beskrivelse af jeres metoder her;

vi beregner en ny tid med hastigheden i anden. Der-efter læser vi vores

-regress på tabel data.

b) benyt modellen til at bestemme boldens hastighed, da den var 0.20 meter over gulvet

Da $v^2 = a \cdot h + b$ må vi skulle tage kvadratroden af $a \cdot h + b$ og sætte 0.20 meter ind på h's plads for at finde hastigheden for bolden, da den var 0,20 cm over gulvet

$\sqrt{a \cdot 0.2 + b}$ ▶ 3.67092

dvs. den har en hastighed på 3.67 m/s når den er 20 cm over gulvet.

husk på at ligningen $x^2 = t$, $t > 0$ har to løsninger $x = \pm \sqrt{t}$, så I har også løsningen - 3,67 m/s.

Opgave 1

Opgave 15

En kassformet hønsegård skal indhegnes med trådnæt. Hønsegården er placeret langs en mur, så en del af muren udgør hønsegårdens ene side. Den del af hønsegården, der skal indhegnes med trådnæt, består således af bunden, toppen og tre sider.

Bredden af hønsegården betegnes med x , længden af hønsegården med y , og højden betegnes med h . Det oplyses, at det samlede areal af trådnettet er 48 m^2 .

a) Der gøres rede for, at voluminet V af hønsegården som funktion af x og y er bestemt ved

$$V(x,y) := x \cdot y \cdot \frac{48 - 2 \cdot x \cdot y}{2 \cdot x + y} \quad \text{Udført}$$

hvor $V(x,y)$ betegner voluminet af hønsegården (målt i m^3) med bredde x (målt i m) og længde y (målt i m).

Først opstiller vi et udtryk for overfladearealet af trådnettet

$$a = 2 \cdot xy + y \cdot h + 2 \cdot hx$$

Vi sætter nu dette udtryk lig 48 og isolere h .

$$\text{solve}(2 \cdot x \cdot y + y \cdot h + 2 \cdot h \cdot x = 48, h) \rightarrow h = \frac{-2 \cdot (x \cdot y - 24)}{2 \cdot x + y}$$

Hvis vi så lige udregner vores h :

$$\frac{-2 \cdot (x \cdot y - 24)}{2 \cdot x + y} = \frac{48 - 2xy}{2x + y}$$

omskriver

Vi ved altså at voluminet kan finde ved at siges $x \cdot y \cdot h$, og så har vi så fundet ud af at h , kan udtrykkes ved $\frac{48 - 2xy}{2x + y}$, så passer

dette med udtrykket givet i starten af opgaven altså $V(x,y) = xy \cdot \frac{48 - 2xy}{2x + y}$

b) Grafen for V tegnes i grafvinduet $[0;20] \times [0;20] \times [0;35]$

Dette gøres i vinduet til højre

Det oplyses at $P(2,4,32)$ er et stationært punkt for V .

c) Der bestemmes arten af P , og der forklares, hvad P og arten af P fortæller om hønsegården.

vi finder r , s og t , som hører til formelen $r \cdot t - s^2$

$$r := \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dx} (V(2,4)) \right) = 0$$

$$t := \frac{d}{dy} \left(\frac{d}{dy} (V(2,4)) \right) = 0$$

$$s := \frac{d}{dx} \left(\frac{d}{dy} (V(2,4)) \right) = 0$$

det går galt fordi
I indsætter (2,4) for
I differencierer og
der med differencierer
I en konstant.

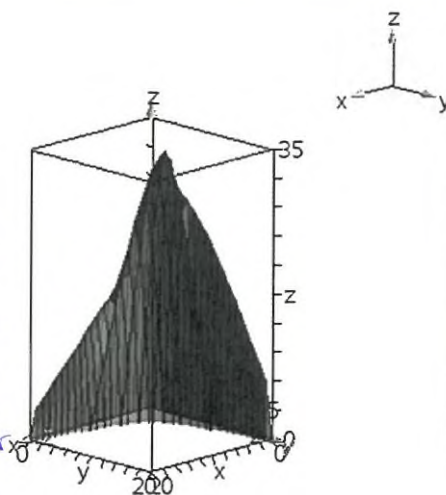
Vi indsætter nu disse værdier i formlen:

$$r \cdot t - s^2 = 0$$

Når $r \cdot t - s^2$ er lige med 0, betyder det at arten er ubestemt.

Det P fortæller om hønsegården er dens bredde, længde og voluminet af hønsegården, i den rækkefølge. Så når bredden er 2, og længden 4, så er voluminet 32.

Det arten af P fortæller om hønsegården er at vi ikke kan sige om disse mål, ville give den bedste mulige udnyttelse af hønsestellet, altså et lokalt maksimum, eller ikke.



Opgave 1

OPGAVE 17 - del 1

Figuren viser et lodret snit af en Wankelmotor. I en model har randen af det indre af forbrændingskammeret form som parameterkurven for vektorfunktionen $\vec{s}$ givet ved, skrives uden vektorpil

$$\vec{s}(t) := \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} \quad \text{Udført } 0 \leq t \leq 6\pi$$

$$x(t) := \frac{1}{2} \cdot \cos(t) + \frac{7}{2} \cdot \cos\left(\frac{1}{3} \cdot t\right) \quad \text{Udført}$$

$$y(t) := \frac{1}{2} \cdot \sin(t) + \frac{7}{2} \cdot \sin\left(\frac{1}{3} \cdot t\right) \quad \text{Udført}$$

Det oplyses, at parameterkurven er symmetrisk omkring begge akser, og at parameterkurven beskriver randen af de indre forbrændingskammeret, netop når t -værdien gennemløber intervallet $[0; 6\pi]$. Enheden på begge akser er cm.

a) Benyt modellen til at bestemme den største lodrette afstand d i det indre af forbrændingskammeret.

Vi finder først den vandrette tangent, for at gøre det løser vi ligningen $y'(t)=0$ og finder t . Da vi kan se på figuren, at det er i de to punkter hvor den lodrette afstand er størst. Vi kan også se at figuren er symmetrisk, så derfor er x -værdien ens for de to punkter vi leder efter, og y -værdierne er ens, men med modsat fortegn.

$$\text{solve}\left(\frac{d}{dt}(y(t))=0, t\right) \quad 0 \leq t \leq 6\pi \rightarrow t=3.45079 \text{ or } t=4.71239 \text{ or } t=5.97399 \text{ or } t=12.8756 \text{ or } t=14.1372 \text{ or } t=15.3988$$

Vi indsætter de fundne t -værdier ind i vektorfunktionen $\vec{s}$, for at finde de to punkter, der skaber den største afstand.

$$\begin{aligned} &\vec{s}(3.45079) = \begin{bmatrix} 0.952576 \\ 3.0429 \end{bmatrix}, \vec{s}(4.71239) = \begin{bmatrix} -6.79744 \cdot 10^{-7} \\ 3. \end{bmatrix}, \vec{s}(5.97399) = \begin{bmatrix} -0.952578 \\ 3.0429 \end{bmatrix}, \vec{s}(12.8756) = \begin{bmatrix} -0.952546 \\ -3.0429 \end{bmatrix}, \vec{s}(14.1372) = \begin{bmatrix} 0.000022 \\ -3. \end{bmatrix}, \\ &\vec{s}(15.3988) = \begin{bmatrix} 0.952607 \\ -3.0429 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

OPGAVE 17 - del 2

Vi kan se, at i de to punkter, hvor man vil bestemme den største lodrette afstand d , kommer der to x -værdier, $x=0.952576$, med y -værdierne $y=3.0429$ og $y=-3.0429$. Ud fra disse x -koordinater og y -koordinater, kan vi se, at de er symmetriske om førsteaksen.

Derfor skal vi bruge punkterne $(0.952576, 3.0429)$ og $(0.952607, -3.0429)$.

Vi kan nu finde den lodrette afstand mellem punkterne, ved at beregne forskellen mellem de to y -værdier.

$$|-3.0429 - 3.0429| = 6.0858$$

Den største lodrette afstand d er **6,09**.

cm ifølge modellen, der er angivet i opgaven at enheden er cm.

Længden L af en parameterkurve i intervallet $[a; b]$ kan bestemmes ved

$$L = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt, \text{ hvor } x(t) \text{ og } y(t) \text{ angiver koordinatfunktionerne for vektorfunktionen hørende til parameterkurven.}$$

b) Benyt modellen til at bestemme længden af randen af det indre af forbrændingskammeret.

Vi ved at grænserne er $a:=0$ og $b:=6\pi \approx 18.8496$. Dermed kan vi indsætte ind på formelen for bestemmelse af kurvelængden.

$$L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{d}{dt}(x(t))\right)^2 + \left(\frac{d}{dt}(y(t))\right)^2} dt \approx 23.0131$$

Længden af det indre af forbrændingskammeret er **23.01cm**.

Opgave 16

En funktion af to variable er givet ved:

$$f(x,y) := \frac{24 \cdot x}{x^2 + y^2 + 4} \rightarrow \text{Udført}$$

a) Bestem koordinatsættet til hvert af de to stationære punkter for funktionen f

Har tegnet grafen for f i vinduet $[-7:7] \times [-7:7] \times [-7:7]$ her ved siden af

Vi bestemmer de partielt afledte funktioner, for x^* og y^*

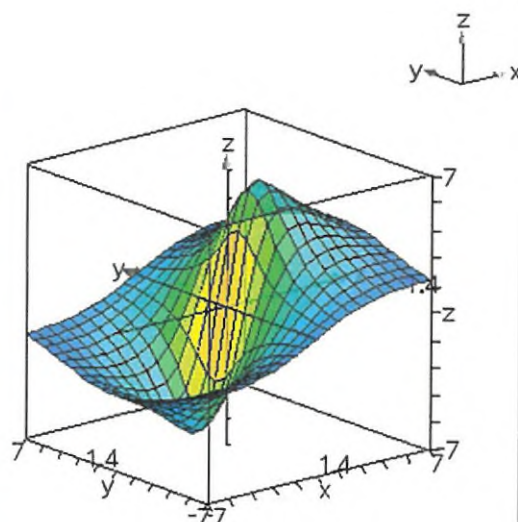
$$f_{mx}(x,y) := \frac{d}{dx}(f(x,y)) \rightarrow \text{Udført}$$

$$f_{mx}(x,y) = \frac{-24 \cdot (x^2 - y^2 - 4)}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

$$f_{my}(x,y) := \frac{d}{dy}(f(x,y)) \rightarrow \text{Udført}$$

$$f_{my}(x,y) = \frac{-48 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Andreas Juhl & Viktor Storm 3.e



husk at indføre notation $f'_y = f_{my}(x,y)$ osv.

Så løser vi lighederne når $f_{mx}(x,y) = 0$ og $f_{my}(x,y) = 0$

$$\text{solve}(f_{mx}(x,y)=0 \text{ and } f_{my}(x,y)=0, x, y) \rightarrow x=-2 \text{ and } y=0 \text{ or } x=2 \text{ and } y=0$$

Vi får x og y sættene $(-2,0)$ og $(2,0)$, men vi mangler z

Vi sætter de fundne værdier ind i $f(x,y)$ for at finde z

$$f(-2,0) \rightarrow -6 \text{ og } f(2,0) \rightarrow 6$$

Koordinatsættene til de to stationære punkter, vi kalder dem P og Q, bliver:

$$P(-2,0,-6) \text{ og } Q(2,0,6)$$

b) Argumenter for at niveaukurven, bestemt ved ligningen $f(x,y) = 4$, er en cirkel

Det vil sige at vi skal vise at $f(x,y) = 4$ kan stå på formen $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

Vi starter med at finde $f(x,y) = 4$

$$f(x,y) = 4 \rightarrow \frac{24 \cdot x}{x^2 + y^2 + 4} = 4, \text{ så ganger vi med } (x^2 + y^2 + 4) \text{ på hver side}$$

Det bliver så $24 \cdot x = 4 \cdot (x^2 + y^2 + 4)$, vi ganger lige ind: $24x = 4x^2 + 4y^2 + 16$, så dividerer vi med 4

$$6x = x^2 + y^2 + 4, \text{ så trækker vi } 6x \text{ fra}$$

$$0 = x^2 + y^2 + 4 - 6x \text{ det kan ogs\aa skrives } 0 = x^2 + y^2 - 6x + 4$$

S\aa kan vi bruge 2. kvadrat-s\ae tning til at kvadratkomplementere.

$$0 = (x-3)^2 + (y-0)^2 + 4 - 9 = (x-3)^2 + (y-0)^2 - 5$$

$$\text{Det kan vi s\aa omskrive til } (x-3)^2 + (y-0)^2 = 5$$

Her kan vi se at det ligner formen for cirklen, fra f\o r, og da den kan st\aa p\aa den form, s\aa ved vi at niveaukurven $f(x,y) = 4$ er en cirkel, med centrum i $(3,0)$ og en radius p\aa $\sqrt{5}$

Opgave 18

På billedet til højre ses en todimensionalmodel af et vindue indlagt i et koordinatsystem med enheden meter på akserne. I modellen har vinduet form som en del af en parabel. Vinduet er 3,7 meter bredt fornedet og er 5,5 høj

a) Opstil en regneforskrift for den funktion, hvis graf beskriver parabelen

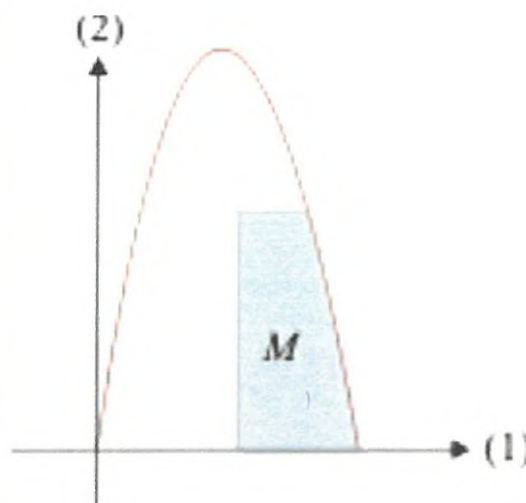
Parablen er beskrevet ved et 2. gradspolynomium, og er dermed givet ved: $a \cdot x^2 + b \cdot x + c$

Vi kender følgende punkter:

(3,7 ; 0), da vinduet er 3,7 meter bred ✓

(1,85 ; 5,5), da parablen er symmetrisk om sit toppunkt ✓

$c=0$, da det aflæses at parablen skærer andenaksen i (0;0) ✓



Herefter opstilles et ligningssystem med de kendte værdier, hvor der løses for a og b

$$\text{solve} \begin{cases} a \cdot (1.85)^2 + b \cdot 1.85 = 5.5 \\ a \cdot (3.7)^2 + b \cdot 3.7 = 0 \end{cases}, a, b$$

► $a = -1.60701$ and $b = 5.94595$

Funktionen der beskriver parablen kan samlet opstilles

$$f(x) = -1.60701 \cdot x^2 + 5.94595 \cdot x$$

Vinduet er inddelt i fire felter. Det skraverede felt M på figuren er afgrænset af parablen, førsteaksen og linjerne med ligninger $x=2,3$ og $y=3,1$

b) Bestem arealet af feltet M

$$f(x) = -1.60701 \cdot x^2 + 5.94595 \cdot x \rightarrow \text{Udført}$$

Først findes skæringen mellem linjen $y=3,1$ og $f(x)$ ved at løse $f(x)=3,1$

$$\text{solve}(f(x)=3.1, x) \rightarrow x=0.627929 \text{ or } x=3.07208$$

På grafen aflæses det relevante skæringspunkt til at være $x=3,07208$, og dette benyttes til at bestemme arealet af det dannede rektangel med højden 3,1 m og bredden $3.07208 - 2.3 \rightarrow 0.77208$ m

$$\text{arektangel} = 3.1 \cdot 0.77208 \rightarrow 2.39345$$

Herefter bestemmes det resterende af arealet M ved det bestemte integral i intervallet $[3,07208; 3,7]$

$$\text{arest} := \int_{3.07208}^{3.7} f(x) dx \rightarrow 1.0396$$

De to arealer lægges sammen

$$A(M) = \text{arektangel} + \text{arest} \rightarrow 3.43305$$

Det samlede areal af feltet M er $3,43 \text{ m}^2$ ifølge modellen

1. koordinater til skæringspunktet.