Opgave 1

f defineres

$f(x):=e^{0.25\cdot x}+e^{-0.5\cdot x}$ ▸ *Udført*

a) vi bestemmer minimum for f.

Vi ved at f'(x)=0 da der skal være en vandret tangent i et minimum. f'(x) bestemmes

f'(x)=$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*

$fm(x)$ ▸ $0.25\cdot(1.28403)^x-0.5\cdot(0.606531)^x$

Dernæst løses f'(x)=0 for x

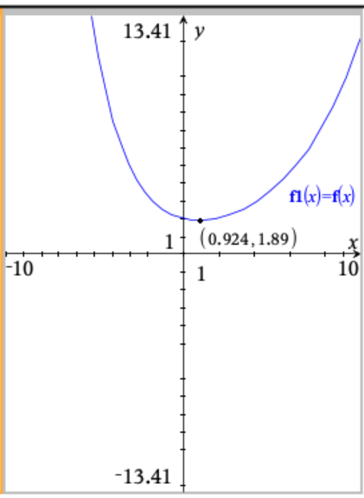
$\text{solve}(fm(x)=0,x)$ ▸ $x=0.924196$

Vi tegner grafen for f i grafvinduet til højre at se at x=0.924196 er et minimumssted, hvilket vi kan aflæse det er.

Vi indsætter x i f for at bestemme minimum

$f(0.924196)$ ▸ 1.88988

Minimum for f er 1,89.



b) Vi skal bestemme volumen af det omdrejningslegeme punktmængden M danner når den roteres 360° om 1.aksen. Linjerne x=−2 og x=3 afgrænser punktmængden.

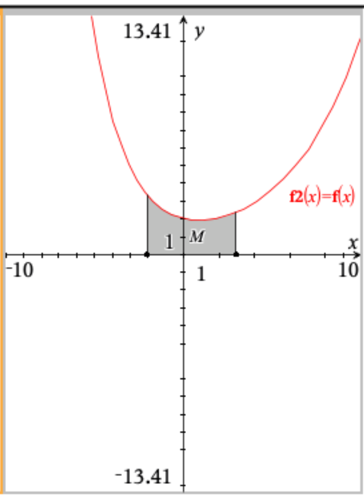
Vi benytter formlen for volumen af et omdrejningslegeme formel 172 i formelsamlingen med grænserne:

$a:=-2$ ▸ -2

$b:=3$ ▸ 3

$V=\pi\cdot\int_a^b (f(x))^2\,dx$ ▸ 78.4698

Volumen af omdrejningslegemet er 78,47.



c.) Kurvelængden for f bestemmes i intervallet x=−2 til x=3 vha. formel 171 i formelsamlingen

$L=\int_a^b \sqrt{1+(\mathbf{fm}(x))^2}\, dx \blacktriangleright 5.51231$

Kurvelængden for i intervallet [−2;3] er 5,5.

Opgave 2

I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X.

Målt i mmol/L har X middelværdien 8,4 og spredningen 0,55

a) Vi bestemmer de normale udfald for X.

Vi ved at de normale udfald ligger i intervallet [μ−2σ;μ+2σ].

Vi definere de kendte størrelser

$\mu:=8.4 \blacktriangleright 8.4$

$\sigma\_:=0.55 \blacktriangleright 0.55$

Intervalgrænserne bestemmes

$\mu+2\cdot\sigma\_ \blacktriangleright 9.5$

$\mu-2\cdot\sigma\_ \blacktriangleright 7.3$

De normale udfald ligger mellem 7,3 mmol/L og 9,5 mmol/L ifølge modellen.

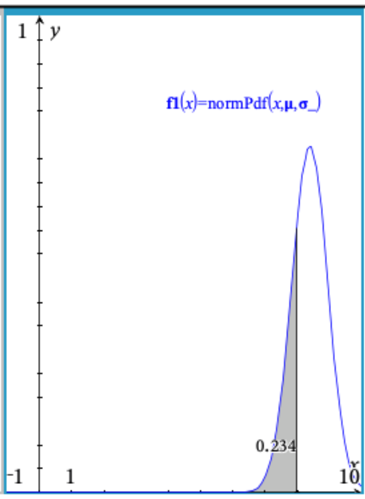
b) Vi bestemmer P(X≤8.0).

Vi benytter kommandoen normcdf til at udregne sandsynligheden

P(X≤8.0)=normCdf(-∞,8.,μ,σ_) ▸ 0.233529

Sandsynligheden for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har

en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L er 23,4% ifølge modellen.



Opgave 3

Vi får givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx}=0.71\cdot\left(1-\frac{y}{80.5}\right)\cdot y$$

hvor y=f(x) er populationens biomasse i mio. kg og x er tiden målt i år.

vi ved at y(0)=20.1

a) Vi bestemmer hastigheden hvormed den samlede biomasse vokser ved x=0.

Vi indsætter begyndelsesbetingelsen y(0)=20.1 i differentialligningen og bestemmer væksthastigheden

$$y'=0.71\cdot\left(1-\frac{20.1}{80.5}\right)\cdot 20.1 \blacktriangleright 10.7077$$

Hastigheden hvormed den samlede biomasse vokser er 10,7 mio. kig pr. år ifølge modellen.

b) Vi skal bestemme et udtryk for den samlede biomasse f(x).

Vi benytter desolve med begyndelsesbetingelsen y(0)=20.1 til at løse differentialligningen

$\text{deSolve}\left(y'=0.71\cdot\left(1-\frac{y}{80.5}\right)\cdot y \text{ and } y(0)=20.1,x,y\right)$

$\blacktriangleright\ y=\frac{80.5\cdot(2.03399)^{x}}{(2.03399)^{x}+3.00498}$

Forskriften for f er f(x)=$\frac{80.5\cdot(2.03399)^{x}}{(2.03399)^{x}+3.00498}$

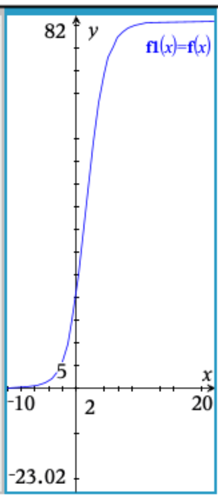
c) Vi bestemmer tidspunktet hvor f(x)=75

Vi definere f

$f(x):=\frac{80.5\cdot(2.03399)^{x}}{(2.03399)^{x}+3.00498}\ \blacktriangleright\ \textit{Udført}$

Vi løser ligningen vha. solve for x

$\text{solve}(f(x)=75,x)\ \blacktriangleright\ x=5.2296$



Opgave 4

I en bestemt håndboldklub er 20 % af medlemmerne tatoveret. Blandt de af klubbens medlemmer, der er tatoverede, er 45 % kvinder.

a) Vi ønsker at bestemme sandsynligheden for et tilfældigt medlem er en kvinde der er tatoveret.

Vi indfører hændelserne

K: Medlemmet er en kvinde

T: medlemmet er tatoveret

Vi har fået sandsynlighederne P(T)=$p\_t:=20\%\ \blacktriangleright\ \frac{1}{5}$, P(K|T)=$p\_kt:=45\%\ \blacktriangleright\ \frac{9}{20}$

Vi skal bestemme P(T∩K). Vi beytter definitionen på betingede sandsynligheder

P(K|T)=$\frac{P(T\cap K)}{P(T)}$

Vi isolerer P(T∩K)

$\text{solve}\left(p\_kt=\frac{x}{p\_t},x\right)\ \blacktriangleright\ x=0.09$

Sandsynligheden for et tilfældigt medlem er en kvinde der er tatoveret er 9%

Vi får oplyst at P(K)=**p_k**:=53% ▸ $\frac{53}{100}$

b) Vi skal bestemme P(T|K). Vi benytter igen definitionen på de betingede sandsynligheder,

P(T|K)=$\frac{P(T\cap K)}{P(K)}=\frac{0.09}{\textbf{p\_k}}$ ▸ 0.169811

Vi har bestemt sandsynligheden for at givet det er et kvindeligt medlem at det har en tatovering til at være ca. 17 %.

Opgave 5

En funktion f er givet ved

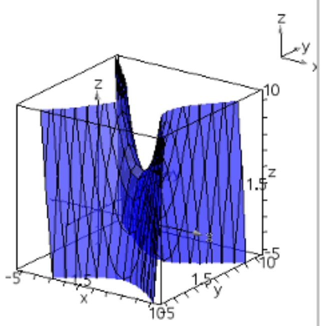
$\mathbf{f}(x,y):=x^2-8\cdot x-y^2+2\cdot y+19$ ▸ *Udført*

a) Vi tegner grafen for f(x,y) i grafvinduet [−5;10]x[−5;10]x[−5;10] til højre.

b)Vi skal bestemme koordinatsættet til punktet P som er et saddelpunkt. Vi finder først de stationære punkter til f ved at bestemme hvor de partielt afledede giver 0. Ligningssystemet løses

$\text{solve}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x,y))=0 \text{ and } \frac{d}{dy}(\mathbf{f}(x,y))=0,x,y\right)$

▸ $x=4$ and $y=1$



ved at bestemme de dobbelte afledte

$f''_{xx}(x,y)=\mathbf{fmmxx}(x,y):=\frac{d^2}{dx^2}(\mathbf{f}(x,y))$ ▸ *Udført* $\mathbf{fmmxx}(x,y)$ ▸ 2

$f''_{yy}(x,y)=\mathbf{fmmyy}(x,y):=\frac{d^2}{dy^2}(\mathbf{f}(x,y))$ ▸ *Udført* $\mathbf{fmmyy}(x,y)$ ▸ -2

$f''_{xy}(x,y)=\mathbf{fmmxy}(x,y):=\frac{d}{dy}\left(\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x,y))\right)$ ▸ *Udført* $\mathbf{fmmxy}(x,y)$ ▸ 0

Vi indsætter x og y for det stationære punkt.

$\mathbf{r}:=\mathbf{fmmxx}(4,1)$ ▸ 2

$\mathbf{t}:=\mathbf{fmmyy}(4,1)$ ▸ -2

$\mathbf{s}:=\mathbf{fmmxy}(4,1)$ ▸ 0

Vi benytter s. 34 i formelsamlingen til at afgøre om det er et stationærtpunkt

$\mathbf{r}\cdot\mathbf{t}-\mathbf{s}^2$ ▸ -4. Da $\mathbf{r}\cdot\mathbf{t}-\mathbf{s}^2<0$ er det et saddelpunkt, vi benytter nu f til at bestemme z-koordinaten til P.

$\mathbf{f}(4,1)$ ▸ 4

Saddelpunktet P har koordinatsættet P(4,1,4)

c.) Vi skal gøre rede for at enhver snitkurve for f i x-retningen bliver en parabel når y fastholdes.

Vi vælger at kigge på y=k, hvor k er et reelt tal

$\mathbf{f}(x,k)$ ▸ $x^2-8\cdot x-k^2+2\cdot k+19$

Vi ser at $\mathbf{f}(x,k)$ er et andengradspolynomium på formen $y=ax^2+bx+c$ hvor a=1, b=−8 og $c=-k^2+2k+19$. Som netop har en parabel som graf. Dette er illustreret i grafvinduet til højre hvor k=1 er tegnet.