

irke**l**bøgerne
3^a

differential- regning a

med opgaver

Ole W. Olsen

differentialregning a

forlaget basis

ISBN 87-87642-36-0

forlaget basis

Ole W. Olsen

9 Om differentialregningens historie

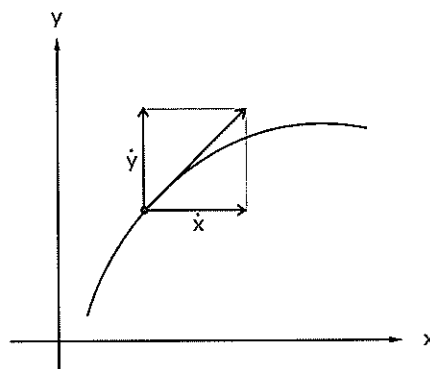
Differentialregningen er ligesom de fleste andre store opfindelser resultatet af mange menneskers værk. Men der er blandt matematikhistorikere enighed om, at de to store navne i differentialregningens historie er Newton og Leibniz. Før vi omtaler disse to personer, vil vi se på deres matematik.

Newtons fluxionsregning

1. Teori

Newton opfattede en kurve som en bane, hvorigennem et punkt (x,y) "flyder" mens tiden går. Størrelserne x og y , der varierer med tiden, kaldte Newton **fluenter** (fluent betyder flydende), og hastigheden af en fluent kaldte han fluentens **fluxion**. Fluenten af x betegnes $\dot{x}$ (der læses: x prik) og fluenten af y betegnes $\dot{y}$.

Bevægelsen af et punkt (x,y) er sammensat af en vandret bevægelse angivet ved x og en lodret bevægelse givet ved y , hvis hastigheder altså betegnes henholdsvis $\dot{x}$ og $\dot{y}$. Og det fremgår af figuren, at tangentens hældningskoefficient er $\dot{y}/\dot{x}$.



9 Om differentialregningens historie

Newton betragtede så et meget lille tidsrum o ("lille o ", ikke "nul"). Idet han antog, at partiklen i dette korte tidsrum bevægede sig med konstant hastighed, fik han ændringen i x -værdien ved at gange hastigheden (fluxionen) $\dot{x}$ med tidsrummet o , således at x vokser med $\dot{x}o$ - og tilsvarende for y . I det lille tidsrum o bevæger partiklen sig således fra punktet (x, y) til det nærliggende punkt $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$. Lad os som et eksempel betragte kurven med ligningen

$$(1) \quad y = x^2 + 3x$$

Da $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ ligger på kurven gælder også, at

$$y + \dot{y}o = (x + \dot{x}o)^2 + 3(x + \dot{x}o)$$

Ved udregning fås heraf

$$(2) \quad y + \dot{y}o = x^2 + \dot{x}^2 o^2 + 2x\dot{x}o + 3x + 3\dot{x}o$$

Ved at trække (1) fra (2) fås

$$\dot{y}o = \dot{x}^2 o^2 + 2x\dot{x}o + 3\dot{x}o$$

Derefter divideres med o på begge sider af lighedstegnet:

$$\dot{y} = \dot{x}^2 o + 2x\dot{x} + 3\dot{x}$$

Nu bortkastes led med o , fordi de er meget små sammenlignet med de øvrige led, og vi får

$$\dot{y} = 2x\dot{x} + 3\dot{x}$$

Sluttelig fås tangenthældningen ved at dividere med $\dot{x}$ på begge sider af lighedstegnet

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = 2x + 3$$

i overensstemmelse med det resultat, vi får ved moderne differentialregning.

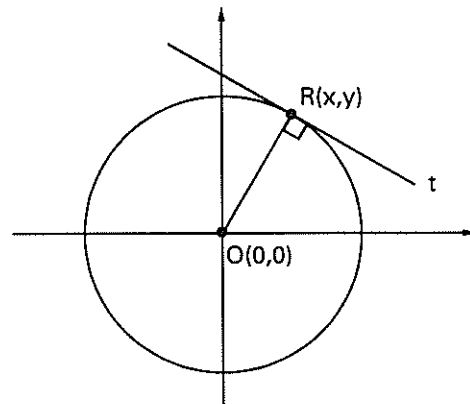
2. Eksempel

Figuren viser enhedscirklen og cirkelns tangent t i punktet (x,y) . I det a_{OR} og a_t betegner hældningskoefficienten for henholdsvis linjestykket OR og tangenten t , får vi, at:

$$a_{OR} = \frac{y-0}{x-0} = \frac{y}{x}$$

og dermed

$$a_t = -1 : \frac{y}{x} = -\frac{x}{y}$$



Vi vil nu se, hvorledes tangenthældningen fås ved Newtons metode. Røringepunktet (x,y) ligger på enhedscirklen, dvs.

$$(3) \quad x^2 + y^2 = 1$$

Det nærliggende punkt $(x + \dot{x}o, y + \dot{y}o)$ ligger også på enhedscirklen, dvs.

$$(x + \dot{x}o)^2 + (y + \dot{y}o)^2 = 1$$

Ved udregning fås heraf

$$(4) \quad x^2 + \dot{x}^2 o^2 + 2x\dot{x}o + y^2 + \dot{y}^2 o^2 + 2y\dot{y}o = 1$$

Ved at trække (3) fra (4) fås

$$\dot{x}^2 o^2 + 2x\dot{x}o + \dot{y}^2 o^2 + 2y\dot{y}o = 0$$

Derefter divideres med o på begge sider af lighedstegnet:

$$\dot{x}^2 o + 2x\dot{x} + \dot{y}^2 o + 2y\dot{y} = 0$$

Nu bortkastes led med o , fordi de er meget små sammenlignet med de øvrige led, og vi får

$$2x\dot{x} + 2y\dot{y} = 0$$

og dermed $y\dot{y} = -x\dot{x}$

Og heraf fås tangenthældningen:

$$\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = -\frac{x}{y}$$

3. Øvelse

Brug Newtons metode til at bestemme $\frac{\dot{y}}{\dot{x}}$ i hvert af følgende tilfælde.

1) $xy = 1$

2) $x^2y = 1$

3) $x^3 + x = y$

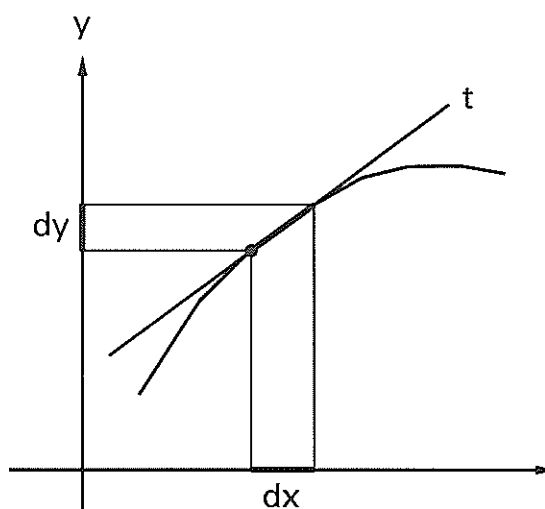
Leibniz' differentialer

4. Teori

Leibniz opfattede en kurve som sammensat af uendelig mange uendelig små linjestykker, som det er vist på figuren i kraftig forstørrelse.

Når man fra kurvepunktet (x, y) bevæger sig et uendeligt lille stykke på kurven får x en tilvækst dx som Leibniz kaldte **differential** af x , og y får tilsvarende tilvæksten dy .

Ifølge Leibniz er tangenten i punktet (x, y) linjen, der fremkommer ved at forlænge linjestykket med endepunkterne (x, y) og $(x + dx, y + dy)$. Da Leibniz opfattede det uendelig lille kurvestykke som et linjestykke, fik han, at tangentens hældningskoefficient er dy/dx , altså differential af y divideret med differential af x .



Leibniz antog, at differentialet dx var forsvindende lille sammenlignet med x selv, eller med andre ord: han benyttede, at

$$x + dx = x$$

På tilsvarende måde regnede han med, at led som $dx dx$, $dx dy$ og $dy dy$ er forsvindende små sammenlignet med led som $x dx$, $y dx$, $x dy$ og $y dy$. Dette betyder, at der f.eks. gælder, at

$$x dy + y dx + dx dy = x dy + y dx$$

Ud fra disse antagelser fandt Leibniz bl.a. følgende regneregler for sine differentialer (hvor x og y er variable og a er en konstant):

- | | |
|---|--|
| 1) $d(x + y) = dx + dy$ | 2) $d(x - y) = dx - dy$ |
| 3) $d(x \cdot y) = x \cdot dy + y \cdot dx$ | 4) $d\left(\frac{y}{x}\right) = \frac{x \cdot dy - y \cdot dx}{x^2}$ |
| 5) $d(ax) = adx$ | 6) $da = 0$ |

Alle reglerne kan vi vise ved at vi tænker os, at vi går en uendelig lille tur på kurven fra begyndelsespunktet (x, y) til slutpunktet $(x + dx, y + dy)$. Lad os eksempelvis betragte brøken. Vi får så

$$\text{startværdi: } \frac{y}{x} \qquad \text{slutværdi: } \frac{y + dy}{x + dx}$$

Differentialet er så brøkens slutværdi minus dens begyndelsesværdi:

$$\begin{aligned} d\left(\frac{y}{x}\right) &= \frac{y + dy}{x + dx} - \frac{y}{x} \\ &= \frac{x(y + dy)}{x(x + dx)} - \frac{y(x + dx)}{x(x + dx)} \\ &= \frac{x(y + dy) - y(x + dx)}{x(x + dx)} \\ &= \frac{xy + xdy - yx - ydx}{x^2 + xdx} \\ &= \frac{xdy - ydx}{x^2 + xdx} \end{aligned}$$

Sluttelig bemærkes, at i nævneren kan xdx bortkastes, da det er uendelig lille sammenlignet med x^2 . Hermed er brøkreglen bevist.

5. Øvelse

Vis de øvrige regneregler for Leibniz differentialer.

6. Øvelse

I beviset for Leibniz' brøkregel erstattede vi til sidst $x^2 + xdx$ med x^2 med den begrundelse, at xdx er uendelig lille sammenlignet med x^2 . Undersøg rimeligheden af denne påstand ved at beregne $x^2 + xdx$ og x^2 i hvert af følgende tilfælde.

- 1) $x = 10$ og $dx = 0,1$

$$x^2 + xdx =$$

$$x^2 =$$

- 2) $x = 10$ og $dx = 0,001$

$$x^2 + xdx =$$

$$x^2 =$$

- 3) Undersøg på tilsvarende måde, om det er rimeligt at sige, at $dx dy$ er uendelig lille sammenlignet med xdy .

7. Eksempel

Ved brug af regnereglerne for differentialer kunne Leibniz nu finde tangenthældningen for en række kurver, hvis ligning var kendt. Lad os f.eks. betragte kurven med ligningen

$$(5) \quad y = x^2 + 3x$$

Heraf fås, at

$$(6) \quad dy = d(x^2 + 3x)$$

Af regnereglerne for differentialer fås, at

$$d(x^2 + 3x) = d(x^2) + d(3x) = xdx + xdx + 3dx = (2x + 3)dx$$

Af (6) fås, at

$$dy = (2x + 3)dx$$

og dermed

$$\frac{dy}{dx} = 2x + 3.$$

8. Øvelse

Find $\frac{dy}{dx}$ i hvert af følgende tilfælde:

$$1) \quad y = ax + b$$

$$2) \quad y = x^3$$

$$3) \quad y = \frac{1}{x}$$

Newton (1642-1727)

Isaac Newton fødtes juledag 1642 i Woolsthorpe, som er en lille landsby i Lincolnshire i det østlige England. Hans far var en velstående selvejerbonde, men han døde, før Newton blev født. Da Newton var fire år, giftede hans mor sig igen, og hun flyttede sammen med sin nye mand, mens Newton blev opdraget af sin bedstemor i Woolsthorpe.

I 1661 blev Newton indskrevet som student ved Trinity College ved Cambridge University, hvor han som lærer fik den berømte matematikprofessor Isaac Barrow (1630-1677).

I 1665 blev Cambridge University lukket, fordi der udbrød pest. Og i årene 1665 og 1666 boede Newton igen hos sin bedstemor i Woolsthorpe. I den periode udviklede han sin version af differentialregningen. I 1667 vendte Newton tilbage til Cambridge. Han offentliggjorde ikke sin opdagelser, men de indgik i hans forelæsninger, og de cirkulerede i manuskript blandt engelske matematikere. De vakte så stor anerkendelse, at han i 1669 - som 27-årig - overtog sin lærer Isaac Barrows professorat, som han beklædte til 1696, hvor han blev møntdirektør med titlen Warden of the Mint og senere Master of the Mint. I 1705 blev han adlet af dronning Anne og blev Sir Isaac.



Sir Isaac Newton

I 1687 udkom Newtons hovedværk "Principia", hvis fulde titel er "Philosophiæ naturalis principia mathematica" (Naturfilosofiens matematiske principper). Naturfilosofien betyder her fysikken. "Principia" blev kun trykt i 500 eksemplarer, men den vakte enorm opsigt, selv om meget få mennesker var i stand til at læse og forstå den.

I "Principia" gav Newton det matematiske grundlag for mekanikken og derudfra bestemte han bl.a. planeternes baner. Newtons tre love fra fysikken findes også her. Og der er henvisninger til fluxionsregningen. Men en egentlig redegørelse for fluxionsregningen udkom først i 1704 - som et tillæg til en bog om optik.

Newton havde mange andre interesser end matematik og naturvidenskab. Blandt andet brugte han megen tid på teologiske studier af kristendommen i det 4. og 5. århundrede.

Leibniz (1647-1716)

Gottfried Wilhelm Leibniz er født i Leipzig, hvor hans far var professor i moralfilosofi. Som barn lærte han græsk og latin, og som 17-årig tog han en universitetseksamen i Leipzig. I 1666 fik han doktorgraden i jura. Det skete ved universitetet i Nürnberg, som han måtte søge til, da man i Leipzig mente, at han var for ung til at blive doktor som 20-årig.

Efter at Leibniz var blevet doktor i jura, blev han ansat som diplomat hos kurfyrsten i Mainz. Da denne døde i 1673, blev Leibniz ansat hos hertugerne i Braunschweig, sidst hos kurfyrst Georg Ludwig, der senere blev konge i England under navnet Georg I.

I sin egenskab af tysk diplomat opholdt Leibniz sig i Paris i tiden 1672-1676. Her modtog han privatundervisning af en af tidens førende fysikere, hollænderen Christiaan Huygens (1629-1695). Det var under opholdet i Paris, at Leibniz udviklede sin version af differentialregningen.

I 1673 besøgte Leibniz England, hvor han blev indvalgt som udenlandsk medlem af Royal Society, det engelske videnskabsakademi. Her fik han lejlighed til at præsentere sin mekaniske regnemaskine, der var den første der kunne udføre alle fire regningsarter.

I 1700 var han en af hovedkræfterne bag oprettelsen af det Kongelige Videnskabernes Akademi i Berlin. Og han var dets første præsident.

Ligesom Newton havde Leibniz mange andre interesser end matematik og fysik - og jura. Han har givet originale bidrag til historie, geologi, logik og filosofi. Leibniz, der var katolik, brugte en stor del af sit liv i arbejdet på at forene den protestantiske og den katolske kirke.



Gottfried Wilhelm Leibniz

Prioritetsstriden

Så vidt vides har Newton og Leibniz aldrig truffet hinanden, men gennem Leibniz' medlemsskab af Royal Society fik han mulighed for at brevveksle med Newton. De udvekslede resultater, men hemmeligholdt deres metoder, som det var almindeligt på den tid.

På et tidspunkt kom Newton og Leibniz i strid om prioriteten (dvs. ophavsretten) til differentialregningen. Striden, som er blevet kaldt prioritetsstriden, blev ført af såvel Newton og Leibniz som af deres tilhængere. På et tidspunkt blev Leibniz beskyldt for at plagiere Newton bl.a. på baggrund af de breve, han havde modtaget fra Newton.

Leibniz appellerede til Royal Society om en undersøgelse af sagen. Men her havde Newton fat i den lange ende, idet han på det tidspunkt var præsident for Royal Society. Og sagen blev afgjort til Newtons fordel.

Striden var i virkeligheden uden mening: Newton og Leibniz skabte uafhængigt af hinanden hver sin version af differentialregningen. Newtons version af differentialregningen opfandt han som nævnt i 1665-66, mens Leibniz først opfandt sin version i 1673-1676. Men Leibniz udgav sin metode før Newton (Leibniz i 1684-86 og Newton 1704-36).

Da Leibniz døde i 1716, var hans sekretær den eneste, der var med til begravelsen. Da Newton døde i 1727 blev han under stor pragt begravet i Westminster Abbey.

Men det er Leibniz' skrivemåder, vi i dag anvender i matematikundervisningen.

803 For en differentiabel funktion f er givet følgende tabel.

x	12	13	14	15	16
f(x)	2,48	2,56	2,64	2,71	2,77

Udfyld følgende tabel.

x	13	14	15
f'(x)			

804 Bestem brøken

$$\frac{f(x+d) - f(x-d)}{2d}$$

når funktionen f er bestemt ved, at

$$f(x) = ax^2 + bx + c$$

og sammenlign det fundne udtryk med $f'(x)$.

805 Som forrige opgave, idet funktionen f nu er bestemt ved, at

1) $f(x) = ax + b$

2) $f(x) = x^3$.

806 For en faldende kugle betragter vi funktionerne h og v , hvor

$h(t)$ = kuglens højde til tiden t

$v(t)$ = kuglens hastighed til tiden t

hvor t måles i sekunder, $h(t)$ i meter og $v(t)$ i meter pr. sekund.

For funktionen h er givet følgende tabel.

t	0,50	0,55	0,60	0,65
h(t)	6,25	6,51	6,80	7,11

t	0,70	0,75	0,80	0,85
h(t)	7,45	7,81	8,20	8,61

Bestem en tabel for funktionen v , og bestem en regneforskrift for v .

807 Løs følgende ligning ved Newton Raphsons metode, idet løsningerne ønskes med 5 decimaler:

$$\ln x - x + 2 = 0.$$

808 Som forrige opgave, idet ligningen er $x + e^{-x} - 3 = 0$.

809 Som forrige opgave, idet ligningen er $\frac{1}{6}x^2 = \ln x$.

810 Gør rede for, at ligningen $\ln x = 3 - x$ har netop én løsning, og bestem denne med 5 decimaler ved Newton-Raphsons metode.

811 Som forrige opgave, idet ligningen er $e^x = -x$.

812 Løs følgende ligning ved Newton Raphsons metode, idet løsningerne ønskes med 5 decimaler:
 $0,02x^2 = \sin x$.

813 Som forrige opgave, idet ligningen er $2x + e^x = 2x^3$.

9 Om differentialregningens historie

901 Brug Newtons fluxionsegning til at finde $\frac{y}{x}$ for kurverne med følgende ligninger:
1) $y = ax + b$ 2) $x^3 - y = 0$.

902 Som forrige opgave, når kurverne har følgende ligninger:
1) $x^3 - y^2 = 0$ 2) $y^2 - x = 0$.

903 Som forrige opgave, når kurverne har følgende ligninger:

1) $x^2 + y^2 + y = 0$ 2) $x^2 + x + y = 0$.

904 Brug regnereglerne for Leibniz' differentialer til at finde $\frac{dy}{dx}$ for kurverne med følgende ligninger:

1) $y = \frac{1}{x+1}$ 2) $y = \frac{1}{x^2+1}$.

905 Som forrige opgave, når kurverne har følgende ligninger:

1) $y = \frac{1}{x}$ 2) $y = (1 + \frac{1}{x})^2$.

906 Som forrige opgave, når kurverne har følgende ligninger:

1) $x^2 - y^3 = 0$ 2) $x^2 - 2x + y^2 - 3 = 0$.