

Sætning: Integralregningens hovedsætning

Lad f være en ikke-negativ funktion og kontinuert funktion i intervallet $[a; b]$.

Så er arealfunktionen $A(x)$, der angiver arealet under grafen for f fra a til x , en stamfunktion til f .

Dvs. $A(x)$ er differentiabel, og $A'(x) = f(x)$.

Bevis

Vi antager, $f(x)$ er kontinuert, ikke-negativ i $[a; b]$

Vi antager, at $f(x)$ er voksende og viser det kun i det tilfælde. Desuden antager vi, at $x > x_0$.

Vi ønsker at vise at $A(x)$ er differentiabel, og at $A'(x) = f(x)$.

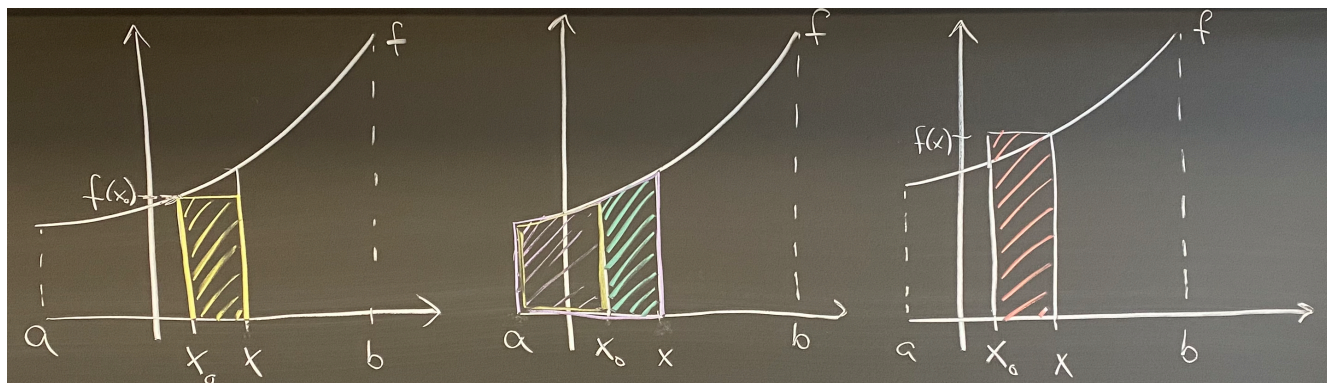
For at vise differentiability skal vi bruge **tretrinsreglen** til at vise at sekanthældningen $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ har en grænseværdi når $x \rightarrow x_0$.

1. trin: opskriv sekanthældningen

Da vi ikke kender nogen forskrift for $A(x)$ kan vi ikke bruge tretrinsreglen, på samme måde som vi har gjort tidligere, og vi vurderer derfor med arealer for at opskrive sekanthældningen for $A(x)$.

Vi tegner grafen for en voksende, ikke-negativ, kontinuert funktion $f(x)$ i intervallet $[a; b]$

Vi markerer tre forskellige områder imellem x_0 og x .



Arealet af det gule område
er $(x - x_0) \cdot f(x_0)$

Arealet af det grønne
område er $A(x) - A(x_0)$

Arealet af det røde område
er $(x - x_0) \cdot f(x)$

Det mindste areal er rektanglet på figuren længst til venstre $f(x_0) \cdot (x - x_0)$ (Højde·bredde)

Det største areal er rektanglet på figuren længst til højre $f(x) \cdot (x - x_0)$

Derfor kan vi skrive følgende ulighed:

Areal (lille rektangel) $\leq$ Areal af det gule område $\leq$ Areal (stort rektangel)

$$f(x_0)(x - x_0) \leq A(x) - A(x_0) \leq f(x)(x - x_0)$$

Da $x - x_0 > 0$ kan vi dividere med $x - x_0$ i uligheden uden at skulle vende ulighedstegnene.

$$f(x_0) \leq \frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \leq f(x)$$

Vi bemærker, at vi nu endelig har fået udført 1. trin i tretrinsreglen, da $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ er sekanthældningen, som vi skal vise har en grænseværdi.

Vi kan ikke omskrive sekanthældningen for $A(x)$, så vi skal nu til 3. trin i tretrinsreglen.

3. trin: Vi finder grænseværdien ved at lade $x \rightarrow x_0$.

$f(x_0) \rightarrow f(x_0)$ for $x \rightarrow x_0$ (tallet $f(x_0)$ afhænger ikke af x).

Da f er kontinuert gælder at $f(x) \rightarrow f(x_0)$ for $x \rightarrow x_0$.

Men da $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0}$ er klemmt inde mellem $f(x_0)$ og $f(x)$, må $\frac{A(x) - A(x_0)}{x - x_0} \rightarrow f(x_0)$ for $x \rightarrow x_0$.

Konklusion

Da sekanthældningen for $A(x)$ har en grænseværdi for $x \rightarrow x_0$ er $A(x)$ differentiabel i x_0 med differentialkvotient $f(x_0)$.

Da x_0 er valgt vilkårligt gælder generelt, at $A'(x) = f(x)$. Dvs. $A(x)$ er differentiabel for $x \in [a; b]$ og er dermed også en stamfunktion for f .