

Vejledende besvarelse A10 3g MA

Lærer- og elevbesvarelser

Opgave 1

Opgave 1

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved formlen $\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 - 4 \\ t - 3 \end{pmatrix}$

- a) Bestem koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem
aksen og parametriseringen for $\vec{r}$.

Skæring med x-aksen findes ved $y = 0$

$$t - 3 = 0$$

$$t = 3$$

Jeg indsætter $t = 3$ i $x(t)$

$$x = 3^2 - 4 = 9 - 4 = 5$$

Skæringspunktet på x-aksen er derfor $(5, 0)$ ✓

Skæring med y-aksen findes ved $x = 0$

$$t^2 - 4 = 0$$

$$t^2 = 4$$

$t = 2$ eller -2 , da man tager kvadratroden af 4 for at fjerne potensen

Jeg indsætter $t = 2$ eller -2 i $y(t)$

$$t = 2 \rightarrow y = 2 - 3 = -1 \quad (0, -1)$$

$$t = -2 \rightarrow y = -2 - 3 = -5 \quad (0, -5)$$

Skæringspunkterne er altså med x-aksen $(5, 0)$ og y-aksen $(0, -1)$ og $(0, -5)$ ✓

Opgave 2

En vektorfunktion $\vec{r}$ er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^2 \\ t^3 - 4t \end{pmatrix}$$

På parameterkurven for $\vec{r}$ er punktet P et dobbeltpunkt hørende til t -værdierne $t=2$ og $t=t_0$

a) Bestem koordinatsættet til punktet P

• Jeg indsætter $t=2$ i vektorfunktionen, for at finde punktet.

$$\vec{r}(2) = \begin{pmatrix} 2^2 \\ 2^3 - 4 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 - 8 \end{pmatrix} = \underline{\underline{\begin{pmatrix} 4 \\ 0 \end{pmatrix}}}$$

Dermed er koordinatsættet til dobbelt-punktet $(4,0)$ ✓

b) Bestem t_0 .

$$x(t) = t^2 \quad \text{og} \quad y(t) = t^3 - 4t$$

Vi sætter $x(t) = 4$, så:

$$t^2 = 4$$

$t = \sqrt{4} = \pm 2$, siden en af t -værdierne er $t=2$, så må $t_0 = -2$, vi prøver at indsætte $t=-2$ i $y(t)$ til at se om punktet P passer stadig.

$$y(-2) = -2^3 - 4 \cdot (-2) = -8 + 8 = 0$$

Dvs. at $t_0 = -2$ passer. ✓

Opgave 3

Opgave 3

I et koordinatsystem er en vektorfunktion $\vec{r}$ givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} 2t + 1 \\ t^2 - 1 \end{pmatrix}$$

a) Undersøg, om punktet $P(7, 8)$ ligger på banekurven for $\vec{r}$.

For at undersøge sætter vi $x(t) = 7$ fra P og isolerer t . Herefter

$$2t + 1 = 7$$

$$2t = 7 - 1$$

$$t = \frac{6}{2}$$

$$t = 3$$

Vi indsætter 3 som t -værdi i $y(t)$ og ser om det giver 8. Hvis ikke er det ikke et punkt på banekurven.

$$t^2 - 1$$

$$3^2 - 1$$

$$9 - 1 = 8$$

Dvs. at punktet P ligger på banekurven. ✓

Opgave 4

OPGAVE 4

I et koordinatsystem bevæger et punkt P sig således, at stedvektoren til P til tidspunktet t er givet ved

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} t^3 - t \\ \frac{1}{2}t^2 - t \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}, \quad \text{linjen } l \text{ er bestemt}$$

ved ligningen $l: x - y = 2$.

a) Bestem de to tidspunkter, hvor hastighedsvektoren er parallel med l .

For at vektorer er parallelle skal $\det(\vec{a}, \vec{b}) = 0$.

Jeg finder først hastighedsvektoren

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} 3t^2 - 1 \\ t - 1 \end{pmatrix}$$

Jeg finder en normalvektor i linjen

$$x - y = 2 \quad a = 1 \quad \text{og} \quad b = -1$$

$$\text{dermed} \quad \vec{n} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \hat{n} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \vec{r}$$

Determinanten bestemmes ved: $\begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix} = 0$

$$(3t^2 - 1) \cdot 1 - (t - 1) \cdot 1 = 0$$

$$\Updownarrow, \quad 3t^2 - 1 - t + 1 = 0$$

$$\Updownarrow, \quad 3t^2 - t = 0$$

Faktoriser

$$t(3t - 1) = 0$$

nulreglen

$$t = 0$$

$$\text{eller} \quad 3t - 1 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 3t = 1 \quad \Leftrightarrow \quad t = \frac{1}{3}$$

De to tidspunkter er dermed $t = 0$ og $t = \frac{1}{3}$ ✓

Opgave 5

En vektorfunktion $\vec{s}$ er bestemt ved

$$\vec{s}(t) = \begin{pmatrix} 5 + 7 \cdot \cos(t) \\ -1 + 7 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

a) Bestem $\vec{s}(0)$

$$t = 0$$

$$\vec{s}(0) = \begin{pmatrix} 5 + 7 \cdot \cos(0) \\ -1 + 7 \cdot \sin(0) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 5 + 7 \cdot 1 \\ -1 + 7 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

b) Bestem en ligning for cirklen til parameterkurven

Cirkels ligning er $(x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$

parameter fremstilling for cirkel er

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} r \cdot \cos(t) \\ r \cdot \sin(t) \end{pmatrix}$$

Dermed er cirkels ligning

$$(x-5)^2 + (y+1)^2 = 7^2$$

$$\Leftrightarrow (x-5)^2 + (y+1)^2 = 49 \quad \checkmark$$

Opgave 6

Opgave 6: En vektorfunktion r er givet ved $r(t) = \begin{bmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{bmatrix}$. På banekurven for r er punktet Q et dobbeltpunkt hørende til t -værdierne $t = -2$ og $t = t_0$.

a) Bestem koordinatsættet til punktet Q og bestem t_0 .

Jeg bestemmer koordinatsættet ved at sætte min kendte t -værdi ind i vektorfunktionen:

$$r(t) := \begin{bmatrix} t^3 - 12t \\ t^2 - 2t \end{bmatrix} \rightarrow \text{Udført}$$

$$r(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 16 \\ 8 \end{bmatrix}$$

Punktet Q er $(16, 8)$. ✓

Jeg bestemmer t_0 ved at udregne $x(t) = 16$ og $y(t) = 8$ med solve.

$$\text{solve}(t^3 - 12t = 16, t) \rightarrow t = 2 \text{ or } t = 4$$

$$\text{solve}(t^2 - 2t = 8, t) \rightarrow t = -2 \text{ or } t = 4$$

Da jeg allerede kender $t = -2$, så er $t_0 = 4$. ✓

b) Den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q bestemmes.

Vinklen mellem de to tangenter svarer til vinklen mellem de to tangentvektorer i punktet.

Tangentvektoren bestemmes ved at differentiere $\vec{r}(t)$ og denne vektor defineres som $r_m(t)$

$$\vec{r}'(t) = r_m(t) := \frac{d}{dt}(r(t)) \rightarrow \text{Udført}$$

De to tangentvektorer i punktet bestemmes ved at indsætte $t = 4$ og $t = -2$ i $\vec{r}'(t)$

$$\vec{r}'(4) = r_{m4} := r_m(4) \rightarrow \begin{bmatrix} 36 \\ 6 \end{bmatrix}$$

$$\vec{r}'(-2) = r_{m_2} := r_m(-2) \rightarrow \begin{bmatrix} 0 \\ -6 \end{bmatrix}$$

For at finde vinklen mellem to vektorer bruges formlen $v = \cos^{-1}\left(\frac{a \cdot b}{|a| \cdot |b|}\right)$, hvor a og b er vektorer.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\text{dotP}(v2, v4)}{\text{norm}(v2) \cdot \text{norm}(v4)}\right) \rightarrow 99.4623$$

Da vi skal finde den spidse vinkel: $180 - 99.4623 \rightarrow 80.5377$

Dermed er den spidse vinkel mellem banekurvens to tangenter i punktet Q 80,54 grader.

Opgave 7

En cirkel c er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{bmatrix} \quad | 0 \leq t \leq 2 \cdot \pi$$

Det oplyses at $Q(x,y)$ er et punkt på cirklen C , og at punktet har koordinaterne $(-12,0)$.

a) Gøre rede for, at afstanden mellem P og Q kan beskrives ved funktionen:

$$d(t) = \sqrt{173 + 120 \cdot \cos(t) + 20 \cdot \sin(t)}$$

Vi har punktet $P(-12,0)$ så nu skal vi finde punktet $Q(x,y)$. For at finde dette skal vi kigge på parameterfremstillingen. Her er $x = 0 + 5 \cdot \cos(t)$ og $y = 2 + 5 \cdot \sin(t)$ altså er punktet $Q(5 \cdot \cos(t), 2 + 5 \cdot \sin(t))$

Nu skal vi egentlig bare bruge Afstandsformlen: $|PQ| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

Hvor $P(x_1, y_1)$ og $Q(x_2, y_2)$

$$pq = \sqrt{(5 \cdot \cos(t) - (-12))^2 + (2 + 5 \cdot \sin(t) - 0)^2} \rightarrow pq = \sqrt{120 \cdot \cos(t) + 20 \cdot \sin(t) + 173}$$

På den måde kan afstanden mellem P og Q beskrives ved funktionen. ✓

Opgave 8

en vektorfunktion er givet ved $s(t) = \begin{bmatrix} -3 \cdot t^2 + 6 \\ t^3 - 2 \cdot t + 5 \end{bmatrix} \rightarrow$ Udført, hvor $-2 \leq t \leq 2$

Længden L af en banekurve i et interval $[t_1; t_2]$ kan bestemmes med formelen $L = \int_{t_1}^{t_2} \left(\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \right) dt$

a) bestem længden af banekurven for $s(t)$ i intervallet $[-2; 2]$

Jeg differentiere $x(t) := -3 \cdot t^2 + 6 \rightarrow$ Udført og $y(t) := t^3 - 2 \cdot t + 5 \rightarrow$ Udført

$$x_m(t) := \frac{d}{dt}(x(t)) \rightarrow \text{Udført}$$

$$x_m(t) \rightarrow -6 \cdot t$$

$$y_m(t) := \frac{d}{dt}(y(t)) \rightarrow \text{Udført}$$

$$y_m(t) \rightarrow 3 \cdot t^2 - 2$$

Jeg indsætter i formlen

$$\int_{-2}^2 \sqrt{(x_m(t))^2 + (y_m(t))^2} dt \rightarrow 27.8092$$

Længden af banekurven i intervallet $[-2; 2]$ er 27.81 ✓

Opgave 9

Ruten for en mus kan beskrives ved parameterkurven til vektorfunktionen

$$\vec{s}(t) = \begin{bmatrix} 4 \cdot t - t^2 \\ t^3 - 9 \cdot t^2 + 20 \cdot t \end{bmatrix} \quad \text{Udført, } 0 \leq t \leq 4$$

som angiver stedvektoren til musens position i et koordinatsystem med meter som enhed til tiden t i minutter, og hvor musehullet er placeret i (0,0).

a) Musens rute ses tegnes i grafvinduet til højre.

b) $|s'(1)|$ skal bestemmes.

$s'(t)$ bestemmes og defineres

$$sm(t) := \frac{d}{dt}(s(t)) \quad \text{Udført}$$

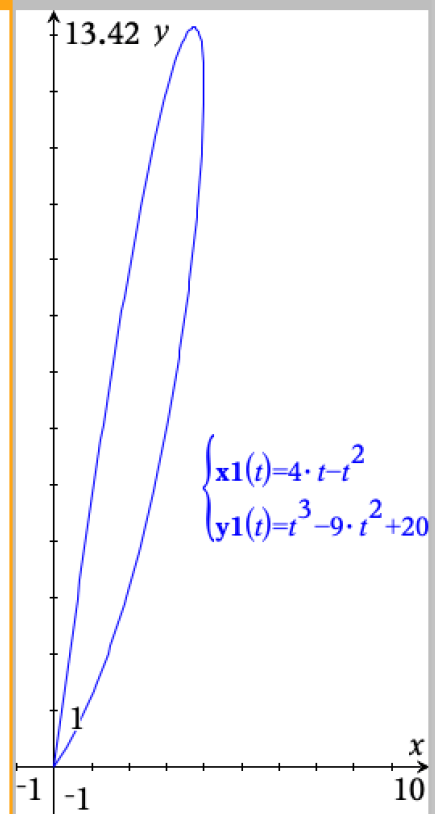
$$sm(t) = \begin{bmatrix} 4 - 2 \cdot t \\ 3 \cdot t^2 - 18 \cdot t + 20 \end{bmatrix}$$

$t=1$ indsættes og længden af $s'(1)$ bestemmes ved kommandoen norm, så

$$|s'(1)| = \text{norm}(sm(1)) = 5.38516$$

Dermed er $|s'(1)| = 5,39$

Dette tal er den fart, musen har til tiden $t=1$. Dvs. musen bevæger sig med en fart på 5,39 meter pr. minut efter 1 minut.



c) Tidspunktet, hvor musen er længst væk fra musehullet bestemmes

Da musehullet er placeret i (0,0) må længden af stedvektoren $\vec{s}(t)$ være en funktion, der angiver afstanden fra musehullet og ud til musen. Denne defineres som $d(t)$

$$d(t) := \text{norm}(s(t)) \quad \text{Udført}$$

$d'(t)$ bestemmes

$$dm(t) := \frac{d}{dt}(d(t)) \quad \text{Udført}$$

For at finde tidspunktet for den største afstand løses ligningen $d'(t)=0$ vha. solve

$$\text{solve}(dm(t)=0, t) = t=1.50377$$

På grafen for $d(t)$ i grafvinduet til højre ses det at der er et maksimum ved $t=1,5$.

Dermed er tidspunktet, hvor musen er længst væk fra musehullet, $t=1,5$ min.

