

DIFFERENTIALLIGNINGER

Eksponentiel vækst

Supplerende stof til den mundtlige eksamen på B-niveau

HVAD ER EN DIFFERENTIALLIGNING?

En differentiaalligning er en ligning, hvor det gælder

- løsningen er en funktion (ikke bare et tal, som vi er vant til)
- den afledede funktion y' indgår i ligningen.

EKSEMPEL 1

$$y' = 6 + 3x$$

er en differentiaalligning, fordi y' indgår i ligningen.

EKSEMPEL 2

$$f'(x) \cdot x = 5 \cdot f(x)$$

er en differentiaalligning, fordi $f'(x)$ indgår i ligningen.

ØVELSE 1

Afgør hvilke af nedenstående ligninger, der er differentiaalligninger

	Differentiaalligning	Almindelig ligning
$y' + 5 = 7y$		
$f'(x) = 6 \cdot f(x)$		
$3y = 14$		
$x + y' = 10 \cdot y$		
$8y = \frac{x}{y}$		

LØSNING TIL EN ALMINDELIG LIGNING

Vi kender almindelige ligninger som $7x + 1 = 8$ eller $6x^2 - 4x + 2 = 0$, som vi kan løse for at finde den ukendte værdi x .

Men vi kan også let undersøge, om noget er en løsning til en ligning.

EKSEMPEL 2

Hvis vi skal undersøge, om $x = 2$ er en løsning til ligningen

$$6x - 5 = 5 + x$$

kan vi indsætte $x = 2$ i ligningen og regne på begge sider af lighedstegnet.

$$6 \cdot 2 - 5 = 5 + 2$$

$$12 - 5 = 5 + 2$$

$$7 = 7$$

Da begge sider af lighedstegnet giver samme resultat er $x = 2$ en løsning.

ØVELSE 2

Undersøg om $x = 3$ er en løsning til ligningen

$$x^2 - 5x + 6 = 0$$

ØVELSE 3

Undersøg om $x = -1$ er en løsning til ligningen

$$8x - 2 = -3x + 1$$

LØSNING TIL EN DIFFERENTIALLIGNING

AT GØRE PRØVE

På samme måde som i almindelige ligninger, kan vi undersøge om en funktion $f(x)$ er en løsning til en differentialligning ved at *gøre prøve*.

Det betyder, at vi indsætter $y = f(x)$ i differentialligningen og undersøger, om det giver det samme resultat på begge sider af lighedstegnet.

EKSEMPEL 3

Hvis vi skal undersøge, om funktionen $f(x) = 4x + 6$ er løsning til differentialligningen

$$y' = y - 4x - 2,$$

indsætter vi $y = f(x)$ i differentialligningen

$$f'(x) = f(x) - 4x - 2.$$

Vi regner først på venstre side af lighedstegnet, hvor vi differentierer $f(x)$.

$$\text{VS: } f'(x) = (4x + 6)' = 4$$

Derefter regner vi på højre side af lighedstegnet, hvor vi indsætter $f(x)$ i stedet for y .

$$\text{HS: } f(x) - 4x - 2 = (4x + 6) - 4x - 2 = 4x + 6 - 4x - 2 = 4$$

Da venstre side og højre side er ens, er $f(x) = 4x + 6$ en løsning.

ØVELSE 4

Undersøg om funktionen $f(x) = e^x + x^2 - 2x - 2$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = x^2 + y$$

ØVELSE 5

Undersøg om funktionen $f(x) = e^{2x} + 3$ er en løsning til differentialligningen

$$y' = 2y - 6$$

DIFFERENTIALLIGNINGER OG TANGENTER

Graferne for løsningsfunktionerne til en differentialligning kaldes *løsningskurver*.

Når $f(x)$ er en løsning til en differentialligning, er $y' = f'(x_0)$ hældningen for løsningskurvens tangent i punktet (x_0, y_0) .

Det betyder, at vi ud fra en differentialligning kan udregne tangenthældningen uden at kende til løsningsfunktionens forskrift.

EKSEMPEL 4

Hvis f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 5x + y$$

kan vi udregne hældningen for tangenten til løsningskurven i punktet $(-1, 2)$ ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen

$$f'(x_0) = f'(-1) = 5 \cdot (-1) + 2 = -3$$

Løsningskurven har altså en tangent med hældning -3 i punktet $(-1, 2)$.

EKSEMPEL 5

Hvis f er en løsning til differentialligningen

$$y' = 20 - 3y$$

kan vi udregne tangenthældningen til løsningskurven i punktet $(0, 6)$ ved at indsætte punktets koordinater i differentialligningen

$$f'(x_0) = f'(0) = 20 - 3 \cdot 6 = 2$$

Løsningskurven har altså en tangent med hældning 2 i punktet $(0, 6)$.

ØVELSE 6

Lad f være en løsning til differentialligningen

$$y' = 2x - 7y$$

Bestem tangenthældningen til løsningskurven i punktet $(5, 1)$.

ØVELSE 7

Lad f være en løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{5x - 4}{y}$$

Bestem tangenthældningen til løsningskurven i punktet $(2,3)$.

EKSEMPEL 6

Hvis f er en løsning til differentialligningen

$$y' = \frac{y^2}{x}$$

kan vi udregne en ligning for tangenten til løsningskurven i punktet $P(2, -1)$.

Vi bestemmer først tangenthældningen ved at indsætte punktet i differentialligningen

$$f'(x_0) = f'(2) = \frac{(-1)^2}{2} = \frac{1}{2}$$

Vi kender formlen for tangentens ligning $y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0)$.

Da vi kender punktet P , ved vi at $x_0 = 2$ og $f(x_0) = y_0 = -1$. Vi indsætter tallene i tangentens ligning.

$$y = \frac{1}{2} \cdot (x - 2) - 1 = \frac{1}{2}x - 1 - 1 = \frac{1}{2}x - 2$$

Tangentens ligning er $y = \frac{1}{2}x - 2$.

ØVELSE 8

Lad f være en løsning til differentialligningen

$$y' = x \cdot y + x^2$$

Løsningskurven går gennem punktet $P(1, -4)$.

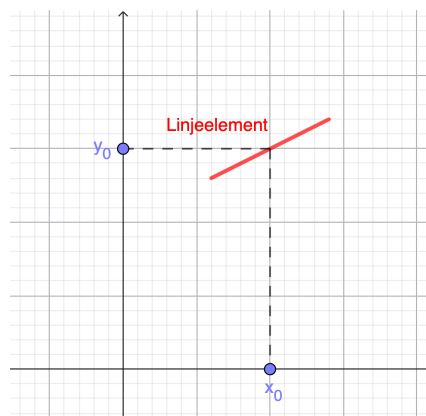
a) Bestem tangenthældningen til løsningskurven i P .

b) Bestem en ligning for tangenten til løsningskurven i P .

LINJEELEMENT

Når vi skriver koordinaterne til punktet (x_0, y_0) sammen med hældningen for tangenten til løsningskurven, kaldes det et *linjeelement*, og det skrives $(x_0, y_0; a)$. Her er $a = f'(x_0)$.

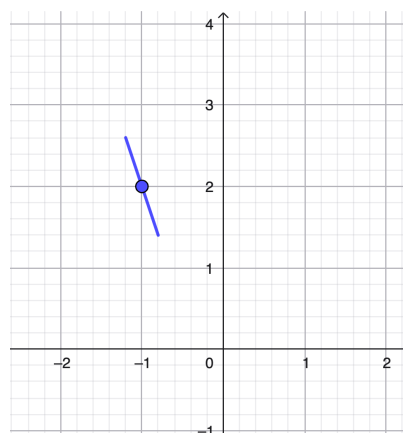
Et linjeelement tegnes som et lille ret linjestykke i punktet (x_0, y_0) med hældning $f'(x_0)$.



EKSEMPEL 6

I eksempel 4 udregnede vi tangenthældningen til -3 i punktet $(-1, 2)$ dvs. linjeelementet i punktet kan beskrives ved $(-1, 2; -3)$.

Når vi skal tegne linjeelementet, tegner vi et linjestykke i punktet $(-1, 2)$ med hældningen -3 .



ØVELSE 9

En differentialligning er givet ved

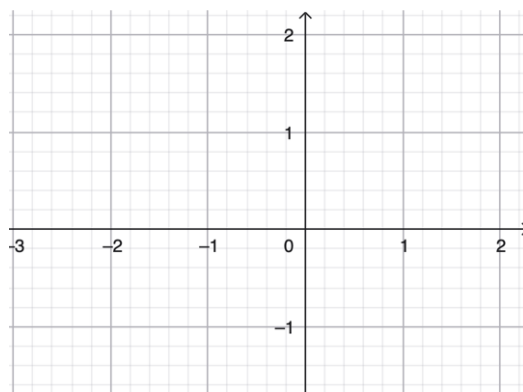
$$y' = x + y$$

Funktionen f er en løsning til differentialligningen.

a) Udregn tangenthældninger til løsningskurverne og linjeelementer i følgende punkter

Punkt	Tangenthældning	Linjeelement
$(0, 1)$		
$(-2, 1)$		
$(1, 1)$		
$(1, -1)$		

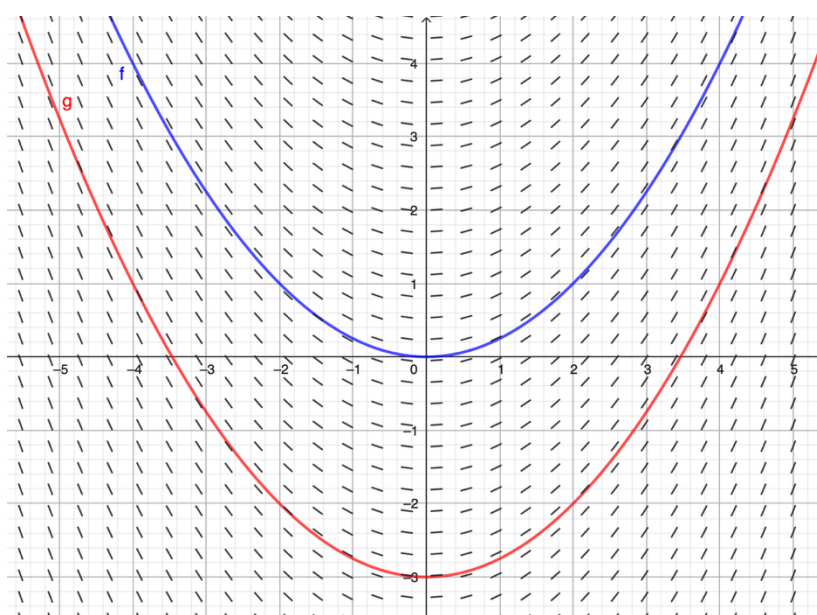
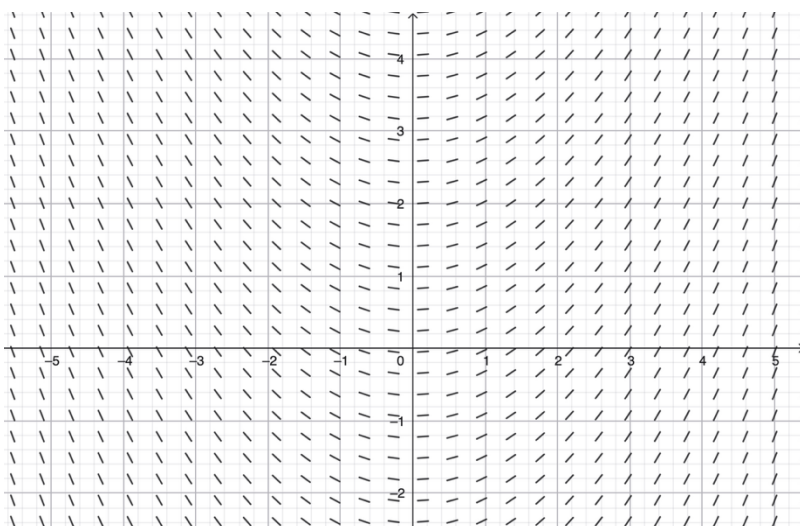
b) Tegn de 4 linjeelementer i koordinatsystemet.



HÆLDNINGSFELT

Hvis vi tegner linjeelementer i alle punkter, kalder vi det et *hældningsfelt*.

Ud fra et hældningsfelt får vi et billede af, hvordan løsningskurverne ser ud.



På figuren til venstre kan vi se et hældningsfelt for differentialligningen $y' = 0,5x$ sammen med 2 forskellige løsningskurver.

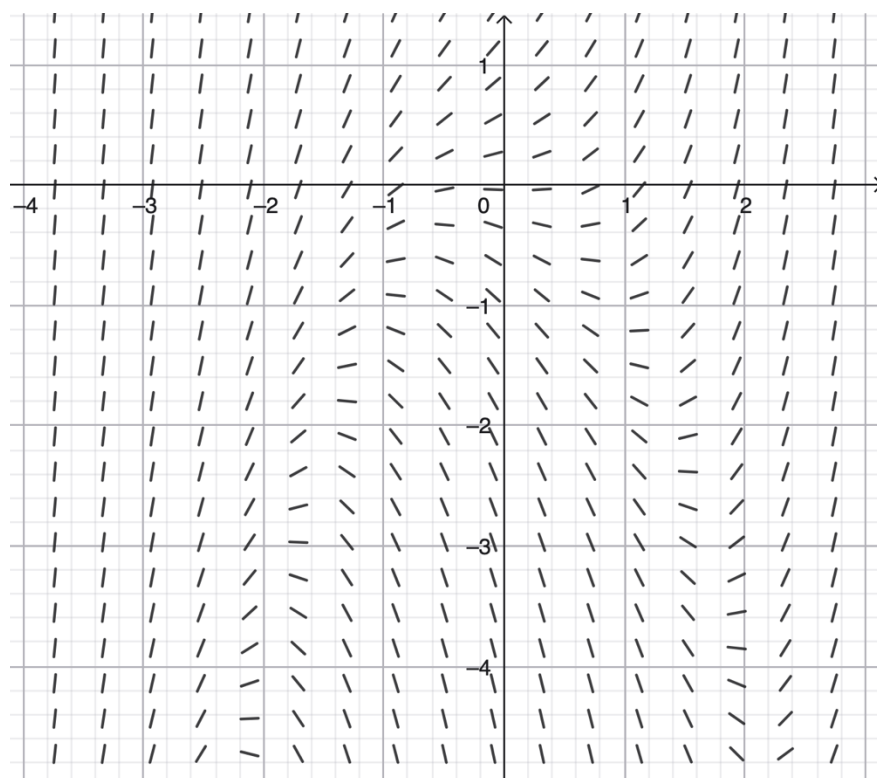
Forskriften for de to løsningsfunktioner er

$$f(x) = \frac{1}{4}x^2 \text{ (blå graf) og}$$

$$g(x) = \frac{1}{4}x^2 - 3 \text{ (rød graf)}$$

ØVELSE 10

Skitsér et par løsningskurver ind på hældningsfeltet til højre.



EKSPONENTIEL VÆKST

Vi skal se på, hvordan vi løser en bestemt type af differentialligninger på formen

$$y' = k \cdot y$$

hvor k er et tal. Vi kalder løsningen til denne differentialligning for *eksponentiel vækst*, da løsningen er en eksponentialfunktion.

SÆTNING

Den fuldstændige løsning til differentialligningen på formen

$$y' = k \cdot y$$

hvor k er en given konstant er givet ved

$$f(x) = c \cdot e^{kx}$$

hvor c er en vilkårlig konstant.

Beviset er et eksistens- og entydighedsbevis.

BEVIS

EKSISTENS

Vi skal bevise, at der eksisterer en løsning. Det gør vi ved at vise, at $f(x) = c \cdot e^{kx}$ er en løsning ved at gøre prøve. Vi indsætter $y = f(x)$ i differentialligningen.

$$\text{VS: } y' = f'(x) = (c \cdot e^{kx})' = c \cdot k \cdot e^{kx}$$

$$\text{HS: } k \cdot y = k \cdot c \cdot e^{kx} = c \cdot k \cdot e^{kx}$$

Da venstre og højre side er ens, er f en løsning.

ENTYDIGHED

I denne del af beviset skal vi vise, at alle løsninger til differentialligningen er på formen $f(x) = c \cdot e^{kx}$.

Vi antager, at en anden funktion $g(x)$ er løsning til differentialligningen.

Det betyder, at vi ved at $y = g(x)$ kan indsættes i differentialligningen, og derfor gælder $g'(x) = k \cdot g(x)$.

Vi vil finde forskriften for $g(x)$.

Vi indfører en hjælpefunktion

$$h(x) = e^{-kx} \cdot g(x) \quad (1)$$

Vi differentierer $h(x)$ ved hjælp af produktreglen

$$h'(x) = (e^{-kx})' \cdot g(x) + e^{-kx} \cdot g'(x)$$

$$h'(x) = -k \cdot e^{-kx} \cdot g(x) + e^{-kx} \cdot g'(x)$$

Da vi ved, at $g'(x) = k \cdot g(x)$ indsætter vi det i ligningen

$$h'(x) = -k \cdot e^{-kx} \cdot g(x) + e^{-kx} \cdot k \cdot g(x) = 0$$

Nu ved vi, at $h(x)$ må være en konstant funktion, når dens afledede funktion er 0. Vi kalder konstanten c .

$$h(x) = c \quad (2)$$

Da vi har to forskellige udtryk for $h(x)$ i ligning (1) og (2), kan vi sætte dem lig med hinanden.

$$e^{-kx} \cdot g(x) = c$$

Vi isolerer $g(x)$ ved at dividere på begge sider af lighedstegnet med e^{-kx} .

$$\frac{e^{-kx} \cdot g(x)}{e^{-kx}} = \frac{c}{e^{-kx}}$$

Med en potensregneregul $\frac{1}{a^{-r}} = a^r$ reduceres højre side

$$g(x) = c \cdot e^{kx}$$

Denne forskrift er den samme som $f(x)$, og dermed har vi vist, at $f(x)$ er den eneste løsning til differentialligningen.



LØSNING AF $Y' = K \cdot Y$

EKSEMPEL 7

Vi vil løse differentialligningen

$$y' = 5 \cdot y$$

Da differentialligningen er på formen $y' = k \cdot y$, kan vi aflæse, at $k = 5$.

Løsningsformlen til differentialligningen er $f(x) = c \cdot e^{kx}$, hvor vi indsætter $k = 5$.

$$f(x) = c \cdot e^{5x}$$

Hvis vi gerne vil finde en konkret løsning, skal vi bruge et punkt, som løsningskurven går gennem.

Hvis vi får givet punktet $(0,4)$ og skal bestemme c , indsætter vi punktets koordinater i løsningsformlen og løser ligningen $f(0) = 4$.

$$f(0) = 4$$

$$c \cdot e^{5 \cdot 0} = 4$$

$$c = 4$$

Derfor er løsningen

$$f(x) = 4 \cdot e^{5x}$$

ØVELSE 11

Bestem den løsning f til differentialligningen $y' = 2 \cdot y$, hvor løsningskurven går gennem punktet $(0,7)$.

ØVELSE 12

Bestem den løsning f til differentialligningen $y' = -3 \cdot y$, hvor punktet $(0,1)$ ligger på løsningskurven.

ØVELSE 13

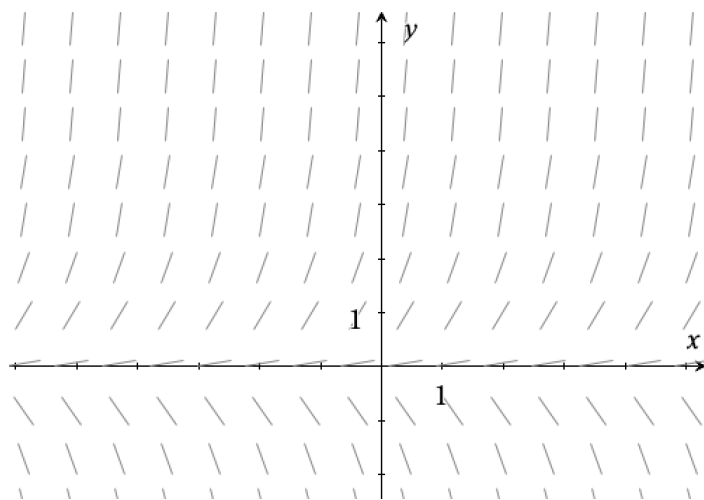
Overvej hvordan løsningskurver til differentialligningen $y' = k \cdot y$ ser ud hvis

a) $k > 0$

b) $k < 0$

ØVELSE 14

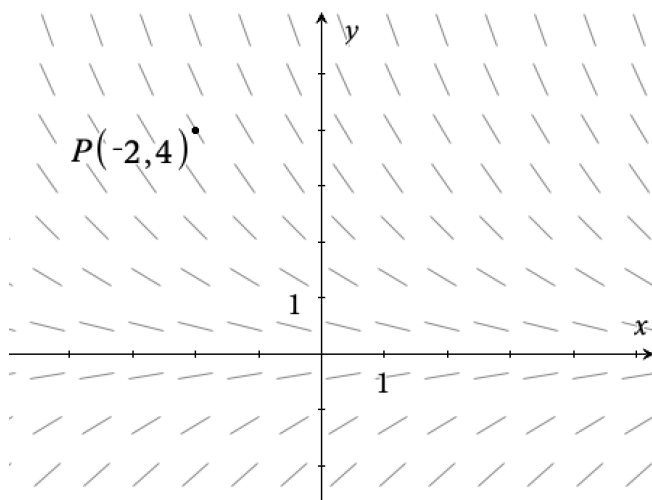
Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.



Afgør, om funktionen $f(x) = 4 \cdot e^{-3x}$ kan være en løsning til differentialligningen.

ØVELSE 15

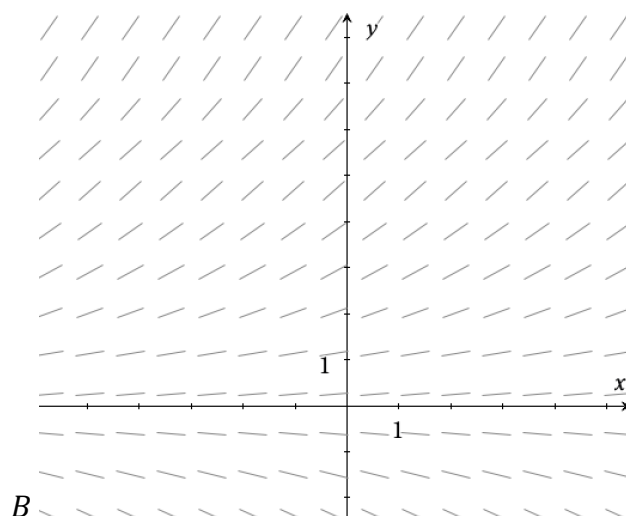
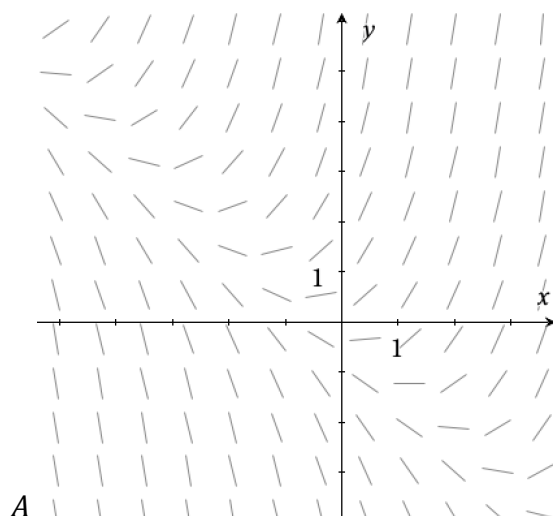
Figuren viser et hældningsfelt for en differentialligning.



Skitsér den løsningskurve, der går gennem punktet $P(-2, 4)$.

ØVELSE 16

På figuren ses 2 forskellige hældningsfelter, der hører til hver sin differentiaalligning.



Afgør hvilket hældningsfelt A eller B, der hører til differentiaalligningen $y' = 0,2 \cdot y$

MUNDTLIGT EKSAMENSSPØRGSMÅL

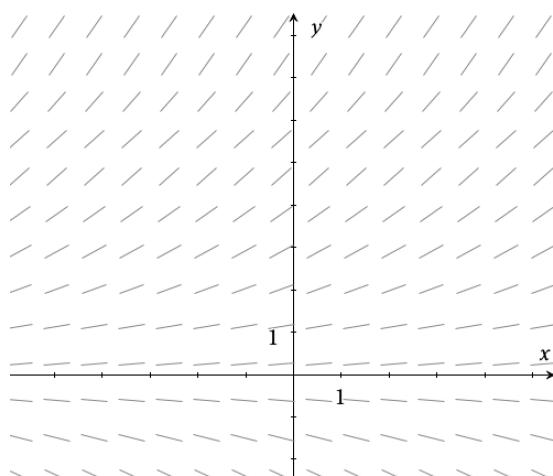
EKSPONENTIEL VÆKST OG DIFFERENTIALLIGNINGER

Du skal forklare om eksponentialfunktioner, herunder forskrift og graf.

Du skal bevise, at løsningen til differentiaalligningen $y' = k \cdot y$ er $f(x) = c \cdot e^{kx}$.

Forklar, hvad fortegnet for k betyder for grafens forløb.

Inddrag materialet herunder



FACITLISTE

Øvelse 1

	Differentialligning	Almindelig ligning
$y' + 5 = 7y$	X	
$f'(x) = 6 \cdot f(x)$	X	
$3y = 14$		X
$x + y' = 10 \cdot y$	X	
$8y = \frac{x}{y}$		X

Øvelse 2 Ja, det er en løsning

Øvelse 3 Nej, det er ikke en løsning

Øvelse 4 Nej, det er ikke en løsning

Øvelse 5 Ja, det er en løsning

Øvelse 6 $f'(5) = 3$

Øvelse 7 $f'(2) = 2$

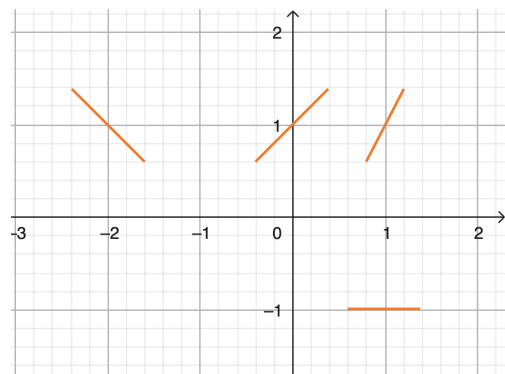
Øvelse 8a $f'(1) = -3$

Øvelse 8b $y = -3x - 1$

Øvelse 9a

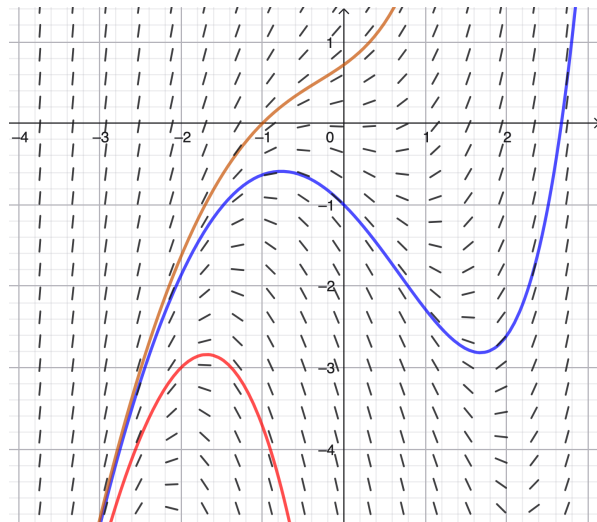
Punkt	Tangenthældning	Linjeelement
(0,1)	1	(0,1;1)
(-2,1)	-1	(-2,1;-1)
(1,1)	2	(1,1;2)
(1,-1)	0	(1,-1;0)

Øvelse 9b



Øvelse 10

Eksempler på 3 forskellige løsningskurver



Øvelse 11 $f(x) = 7 \cdot e^{2x}$

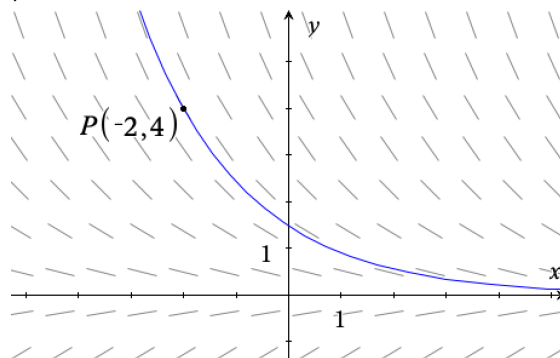
Øvelse 12 $f(x) = e^{-3x}$

Øvelse 13a Løsningsfunktionen er voksende.

Øvelse 13b Løsningsfunktionen er aftagende.

Øvelse 14 Nej, det kan den ikke, da f er en aftagende eksponentialfunktion, mens linjeelementerne omkring (0,4) har en positiv hældning.

Øvelse 15



Øvelse 16 B. Da differentialligningen er på formen $y' = k \cdot y$, hvor løsningen er en eksponentialfunktion.