

DELPRØVE 2-OPGAVER (ALLE TILLADTE HJÆLPEMIDLER)

OPGAVE 1



Billedkilde: Havenyt.dk

I et supermarked udtog man på tilfældig måde 33 agurker.

Tabellen viser sammenhørende værdier af agurkernes længde og vægt.

Længde (i cm)	23	24	34	35
Vægt (i g)	242	245	339	345

Alle tabellens 33 datapunkter findes i den vedhæftede fil: agurker.xlsx

I en model kan sammenhængen mellem agurks længde og vægt beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ er vægten (målt i g), og x er længden (målt i cm).

a) Benyt alle tabellens datapunkter til at bestemme tallene a og b .

b) Undersøg, om residualerne er normalfordelte.

OPGAVE 2

En isproducent har undersøgt det daglige isforbrug blandt en række forbrugere.

Tabellen viser sammenhørende værdier for det daglige isforbrug og middeltemperaturen den pågældende dag.

Middeltemperatur (målt i °C)	5,0	13,3	...	17,8	21,7
Isforbrug (målt i liter)	0,82	0,79	...	0,92	1,16

b (Hele tabellen med alle 30 datapunkter findes i bilaget IsForbrug.xlsx)

I en model kan sammenhængen beskrives ved

$$f(x) = a \cdot x + b,$$

hvor $f(x)$ betegner det daglige isforbrug (målt i liter), og x betegner middeltemperatur (målt i °C).

a) Benyt regression på tabellens data til at bestemme konstanterne a og b .

b) Bestem et 95% konfidensinterval for a , og benyt dette til at afgøre, om der er statistisk belæg for, at sammenhængen mellem det daglige isforbrug og middeltemperaturen er voksende.

INTEGRALREGNING

DELPRØVE 1-OPGAVER (KUN FORMELSAMLING)

OPGAVE 1

På figuren ses grafen for en funktion f .

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen to områder M_1 og M_2 .

Arealet af M_1 er 0,625.

Arealet af M_2 er 4.

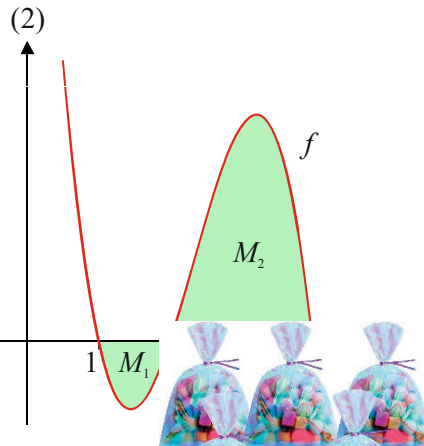
a) Bestem $\int_1^4 f(x) dx$.

b

f

M

M



OPGAVE 2

En funktion f er givet ved

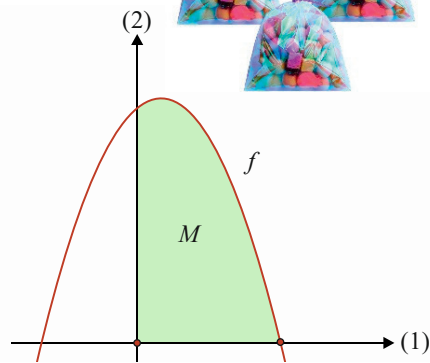
$$f(x) = -x^2 + x + 6.$$

a) Bestem $\int f(x) dx$.

I første kvadrant afgrænser grafen for f sammen med koordinatsystemets akser et område M .

b) Bestem arealet af M .

f



OPGAVE 3

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = x^3 + 2x^2 + 5.$$

a) Bestem den stamfunktion til f , hvis graf går gennem punktet $P(1,6)$.

OPGAVE 4

b) Bestem $\int (x^2 + 3)^2 \cdot 4x dx$.

OPGAVE 5

a) Bestem den stamfunktion til funktionen

$$f(x) = 2x - 6,$$

hvis graf har linjen med ligningen $y = 1$ som tangent.

OPGAVE 6

a) Bestem integralet

$$\int_0^2 (3x^2 + 4x) dx.$$



DELPRØVE 2-OPGAVER (ALLE TILLADTE HJÆLPEMIDLER)

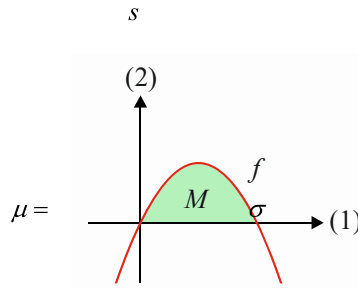
OPGAVE 7

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = k \cdot x - x^2, \text{ hvor } k \text{ er et positivt tal.}$$

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M , se figur.

- Bestem arealet af området M , når $k = 2$.
- Bestem tallet k , så arealet af M er lig med 20.

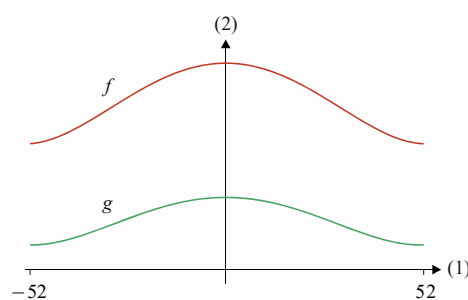


OPGAVE 8



Figur 1

Billedkilde: Living in harmony



Figur 2

Figur 1 viser et foto af et vindue. Figur 2 viser en model af vinduets over- og underkant i et koordinatsystem med enheden cm på begge akser.

Vinduets overkant kan beskrives ved funktionen f givet ved

$$f(x) = 0,000003 \cdot x^4 - 0,01676 \cdot x^2 + 60, \quad -52 \leq x \leq 52.$$

Vinduets underkant kan beskrives ved funktionen g givet ved

$$g(x) = 0,000002 \cdot x^4 - 0,0105 \cdot x^2 + 21, \quad -52 \leq x \leq 52.$$

- Bestem arealet af vinduet.
- Bestem omkredsen af vinduet.

OPGAVE 9

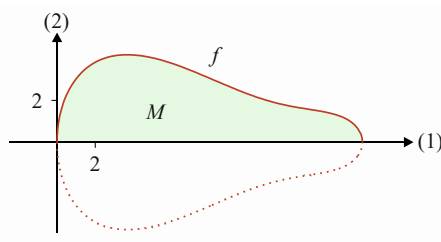
En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \frac{1}{16} \cdot \sqrt{(16x - x^2) \cdot (x^2 - 24x + 164)}, \quad 0 \leq x \leq 16.$$

- Løs ligningen $f(x) = 0$.



Figur 1



Figur 2

Grafen for f afgrænser sammen med førsteaksen et område M .

Figur 1 viser en legetøjskegle. I en model kan legetøjskeglen beskrives ved det omdrejningslegeme, der fremkommer ved, at M drejes 360° om førsteaksen.

I modellen på figur 2 har begge akser enheden cm.

- Benyt modellen til at bestemme rumfanget af legetøjskeglen.

DIFFERENTIALLIGNINGER

DELPRØVE 1-OPGAVER (KUN FORMELSAMLING)

OPGAVE 1

En differentialligning er givet ved

$y' = x + y + 5.$

- a) Bestem linjeelementet i punktet $P(0,1).$

En funktion f er givet ved $f(x) = 7e^x - x - 6.$

- b) Undersøg, om f er en løsning til differentialligningen.

OPGAVE 2

En funktion f er løsning til diff

$y' = k \cdot y.$

Det oplyses, at $f(0) = 4$ og f

- a) Bestem en forskrift for f

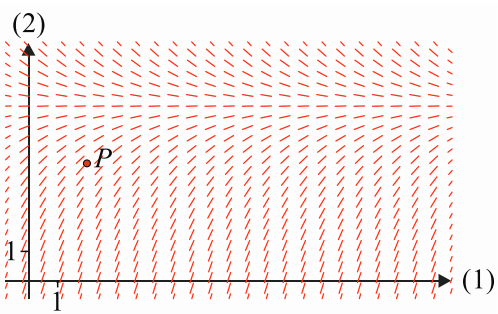


OPGAVE 3

På figuren ses et hældningsfelt hørende til differentialligningen

$y' = 3 - \frac{1}{2} \cdot y.$

Funktionen f er en løsning til differential-
ligningen, og grafen for f går gennem
punktet $P(2,4).$



- a) Indtegn en skitse af grafen for f på det vedlagte bilag.
- b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P.$

DELPRØVE 2-OPGAVER

OPGAVE 4

En differentialligning er givet ved

$y' = y - \frac{1}{2}x^3.$

Grafen for en løsning f til denne differentialligning går gennem punktet $P\left(0, \frac{1}{2}\right).$

- a) Bestem en forskrift for $f.$
- b) Bestem maksimum for $f.$

M M

M M

OPGAVE 5

Der er givet differentialligningen

$$\frac{dy}{dx} = x - \frac{y}{x}.$$

- (p) a) Tegn et hældningsfelt for differentialligningen.

En funktion f er løsning til differentialligningen.

Grafen for f går gennem punktet $P(2,3)$.

- (p) b) Bestem $f'(2)$.

OPGAVE 6

En bestemt kyllings vægt kan i de første fire uger af dens levetid beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dm}{dt} = m \cdot (0,156 - 8,6 \cdot 10^{-5} \cdot m),$$

hvor $m(t)$ er kyllingens vægt i gram, når den er t døgn gammel.

Efter 10 døgn vejer kyllingen 254 gram.

- (p) a) Med hvilken hastighed vokser kyllingens vægt efter 10 døgn?

K

- b) Bestem en forskrift for m .

- c) Hvor gammel er kyllingen, når væksthastigheden af vægten er størst?



Billedkilde: Garden-da

OPGAVE 7

I en model kan udviklingen i temperaturen af en portion risengrød beskrives ved differentialligningen

$$\frac{dy}{dt} = 1 - 0,05y,$$

hvor $y = f(t)$ betegner risengrødens temperatur (målt i $^{\circ}\text{C}$), og t er tiden (målt i minutter), efter den blev sat til afkøling.



Billedkilde: tv2.dk

- a) Bestem væksthastigheden for grødens temperatur, når den er 70°C .

Det oplyses, at til tidspunktet $t = 0$ er væksthastigheden for grødens temperatur -3°C pr. minut.

(p)

- b) Bestem en forskrift for $f(t)$.

(p)



FUNKTIONER OG DIFFERENTIALREGNING

DELPRØVE 1-OPGAVER (KUN MED FORMELSAMLING)

OPGAVE 1

En harmonisk svingning f er givet ved

$$f(x) = 3 \cdot \sin(4x + 5).$$

- a) Bestem amplituden og perioden.

f

OPGAVE 2

En funktion f er givet ved

$$f(x) = (3x^2 + 5) \cdot \cos(x).$$

- a) Bestem $f(0)$.

- b) Bestem $f'(x)$.

OPGAVE 3

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = \sin(2x) + 3x + 4.$$

- a) Gør rede for, at f er en voksende funktion.

OPGAVE 4

Funktionerne f og g er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x + 4 \quad \text{og} \quad g(x) = 2^x.$$

- a) Bestem $f(g(3))$.

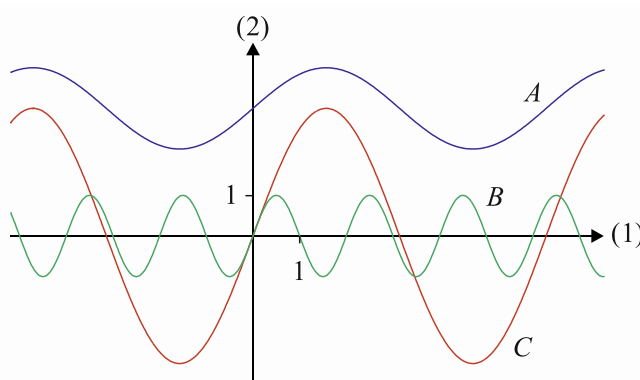
OPGAVE 5

En funktion f er givet ved

$$f(x) = \pi \cdot \sin(x).$$

En af de tre grafer A , B og C på figuren er graf for f .

- a) Gør rede for, hvilken af graferne der er graf for f , og gør rede for, hvorfor det ikke kan være de to andre.



$f =$

$=$

$=$

OPGAVE 6

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x + \sin(x) + 4.$$

- Bestem $f'(x)$.
- Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(0, f(0))$.

OPGAVE 7

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 - 3x - 4.$$

En funktion F er stamfunktion til f .

- Bestem monotoniforholdene for F .
-

OPGAVE 8

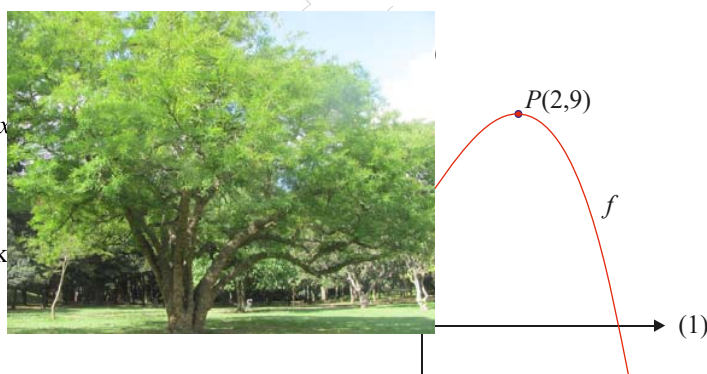
En funktion f er givet ved

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor a og b er konstanter.

Det oplyses, at f har et lokalt maksimum i punktet $P(2, 9)$.

- Bestem a og b .



DELPRØVE 2-OPGAVER

OPGAVE 9

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = \sqrt{x} \cdot (x-3) \cdot (x-5), \quad x \geq 0.$$

- Bestem monotoniforholdene for f ved hjælp af $f'(x)$.

OPGAVE 10

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^{x^3 - 3x^2 + k \cdot x - 1}, \quad \text{hvor } k \text{ er et tal.}$$

- Bestem tallet k , så grafen for f har netop én vandret tangent.

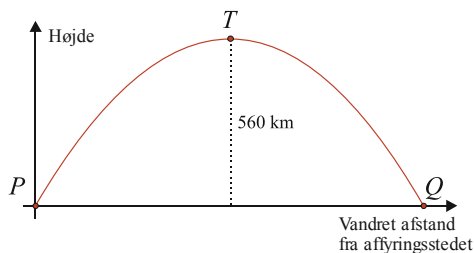
OPGAVE 11

Under den kolde krig anvendtes en bestemt type mellemdistanceraketter med en rækkevidde $|PQ|$ på 2400 km og en maksimal højde på 560 km. Rakettens bane kan beskrives som graf for et andengradspolynomium

$$f(x) = a \cdot x^2 + b \cdot x + c,$$

hvor x er den vandrette afstand fra affyringsstedet (målt i km), og $f(x)$ er raketens højde over jorden (målt i km).

- Bestem en forskrift for f .



STATISTIK OG SANDSYNLIGHEDSREGNING

+ f

DELPRØVE 1-OPGAVER

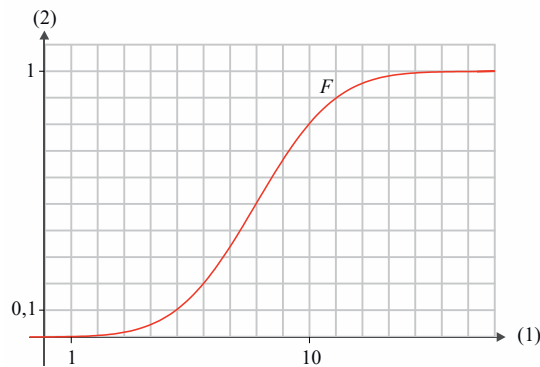
OPGAVE 1

På figuren ses grafen for fordelingsfunktionen F for en normalfordelt stokastisk variabel X .

En funktion f er givet ved forskriften

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 8} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{8}\right)^2}.$$

- a) Gør rede for, at f ikke kan være tæthedsfunktion for X .
Brug bilaget.



OPGAVE 2

Tæthedsfunktionen for en normalfordelt stokastisk variabel X er givet ved

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot 3} \cdot e^{-\frac{1}{2} \cdot \left(\frac{x-10}{3}\right)^2}.$$

- a) Bestem middelværdien og spredningen for X .
b) Bestem sandsynligheden $P(7 \leq X \leq 13)$.

DELPRØVE 2-OPGAVER

OPGAVE 3

En normalfordelt stokastisk variabel X har middelværdi $\mu = 700$ og spredning $\sigma = 58$.

- a) Bestem $P(625 \leq X)$.
b) Tegn grafen for fordelingsfunktionen for X .

OPGAVE 4

I en model kan koncentrationen af hæmoglobin i blodet hos kvinder beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X .

Målt i mmol/L har X middelværdien $\mu = 8,4$ og spredningen $\sigma = 0,55$.

- a) Bestem de normale udfald for X .
b) Bestem sandsynligheden $P(X \leq 8,0)$ for, at en tilfældigt udvalgt kvinde har en koncentration af hæmoglobin i blodet på højst 8,0 mmol/L.

Kilde: min.medicin.dk

OPGAVE 5

Et firma producerer hundefoder, der pakkes i sække.
Vægten af en sæk hundefoder kan antages at være normalfordelt med middelværdi 8 kg og spredning 0,07 kg.
En bestemt sæk med hundefoder fra firmaet vejer 7,75 kg.

- a) Afgør, om vægten af denne sæk er et exceptionelt udfald.

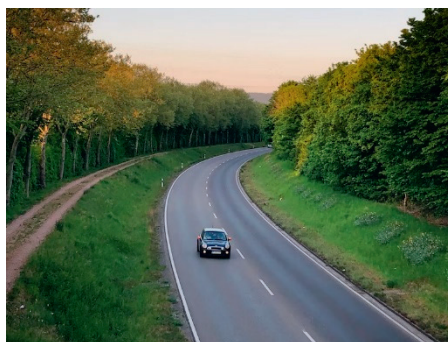
Firmaet har vedtaget en standard om, at mindst 90 % af sækkene skal have en vægt på 7,90 kg eller derover.

- b) Afgør, om firmaet lever op til denne standard.



Billedkilde: VectorStock

OPGAVE 6



Billedkilde: unsplash

I en model kan bilernes fart (målt i km/t) på en bestemt vejstrækning beskrives ved en normalfordelt stokastisk variabel X med middelværdi $\mu = 76,1$ og spredning $\sigma = 7,2$.
Fartgrænsen på vejstrækningen er 80 km/t.

- a) Bestem, hvor stor en andel af bilerne der ifølge modellen kører hurtigere end de tilladte 80 km/t.
- b) Hvor hurtigt kører de 2 % af bilerne, der kører hurtigst?

Kilde: *A comprehensive and unified framework for analysing the effects on injuries of measures influencing speed.*

BASAL REGNETEKNIK

DELPRØVE 1 - OPGAVER

OPGAVE 1

a) Løs ligningssystemet

$$3x - y = 2$$

$$4x + 2y = 16.$$

OPGAVE 2

a) Reducér udtrykket $\frac{(2a)^2 \cdot 3b}{6a}$.

OPGAVE 3

a) Reducér udtrykket $(2a + b) \cdot (2a - b) + b^2$.

OPGAVE 4

a) Reducér udtrykket

b $\frac{15 \cdot x \cdot (x^2 - y^2)}{5 \cdot x \cdot (x - y)}$.

OPGAVE 5

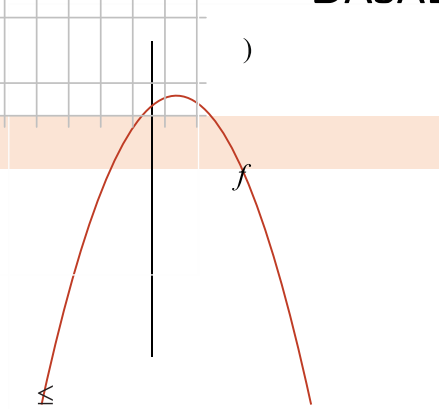
a) Reducér udtrykket

$$\frac{(a+b)^2 - b^2}{a}.$$

OPGAVE 6

a) Løs ligningen

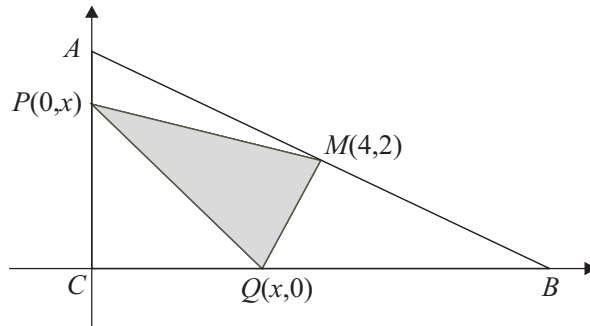
$$(x-3) \cdot (2x-5) = 0.$$



OPTIMERING (DIFFERENTIALREGNING)

DELPRØVE 1 OPGAVER

OPGAVE 1



På figuren ses en retvinklet trekant ABC , hvor $A = (0,4)$, $B = (8,0)$ og $C = (0,0)$.

I trekant ABC er der indskrevet en trekant MPQ . Koordinatsættene for de tre punkter M , P og Q fremgår af figuren.

- a) Vis, at arealet af trekant PQM kan udtrykkes ved funktionen

$$T(x) = -\frac{1}{2}x^2 + 3x, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

- b) Bestem x , så arealet af trekant PQM bliver størst muligt.

$$Q \quad y \quad a \quad x \quad b \quad x \quad c$$

OPGAVE 2

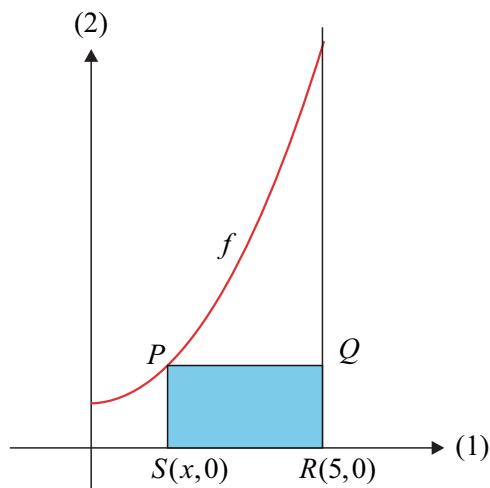
På figuren ses grafen for en funktion f , der er bestemt ved

$$f(x) = x^2 + 3, \quad x > 0.$$

Endvidere ses et rektangel $PQRS$, hvor R og S ligger på førsteaksen. Det oplyses, at punktet P ligger på grafen for f , og at punktet R har koordinaterne $(5,0)$.

- a) Gør rede for, at arealet af rektanglet $PQRS$ udtrykt ved x er givet ved

$$A(x) = -x^3 + 5x^2 - 3x + 15.$$



- b) Bestem x , så arealet bliver størst muligt, idet $0 < x < 5$.

DELPRØVE 2 OPGAVER

OPGAVE 3

I en model for en bestemt type vase betegner a sidelængden i den sekskantede grundflade (målt i cm), og h betegner højden af vasen (målt i cm). For en vase af denne type er vasens volumen V bestemt ved

$$V = 2,6 \cdot a^2 \cdot h,$$

og det ydre overfladeareal O er bestemt ved

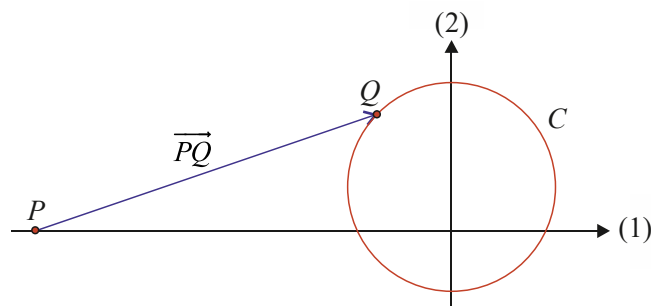
$$O = 2,6 \cdot a^2 + 6 \cdot a \cdot h.$$



En sådan vase skal have et volumen på 1000 cm^3 .

- Bestem højden h udtrykt ved sidelængden a .
- Bestem sidelængden a , så vasens ydre overfladeareal bliver mindst muligt.

OPGAVE 4



En cirkel C er givet ved parameterfremstillingen

$$\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \cdot \cos(t) \\ 5 \cdot \sin(t) \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

Det oplyses, at $Q(x, y)$ er et punkt på cirklen C , og at punktet P har koordinaterne $(-12, 0)$.

- p) a) Gør rede for, at afstanden mellem P og Q kan beskrives ved funktionen

$$d(t) = \sqrt{173 + 120 \cdot \cos(t) + 20 \cdot \sin(t)}, \quad 0 \leq t < 2\pi.$$

- p) b) Bestem koordinatsættet til det punkt Q på cirklen C , der har den mindste afstand til punktet P .

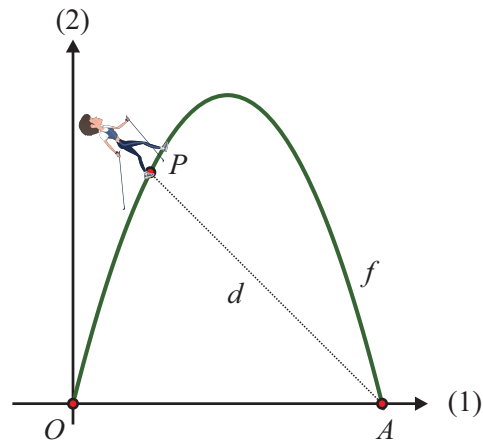
OPGAVE 5

En funktion f er bestemt ved

$$f(x) = -x^2 + 4x.$$

Lise går fra punktet O til punktet A langs en sti på en græsplæne. I en model kan stiens form beskrives ved grafen for funktionen f , hvor x ligger i intervallet $[0; 4]$.

Når Lise befinder sig i et punkt $P(x, f(x))$ på stien, er hendes direkte afstand fra punktet $A(4, 0)$ lig med $d = |PA|$.



a) Gør rede for, at

$$d = \sqrt{x^4 - 8x^3 + 17x^2 - 8x + 16}, \quad 0 \leq x \leq 4.$$

b) Bestem koordinatsættet til det punkt på ruten, hvor Lises direkte afstand fra punktet A er størst.