1. TANGENTER OG DIFFERENTIALKVOTIENTER

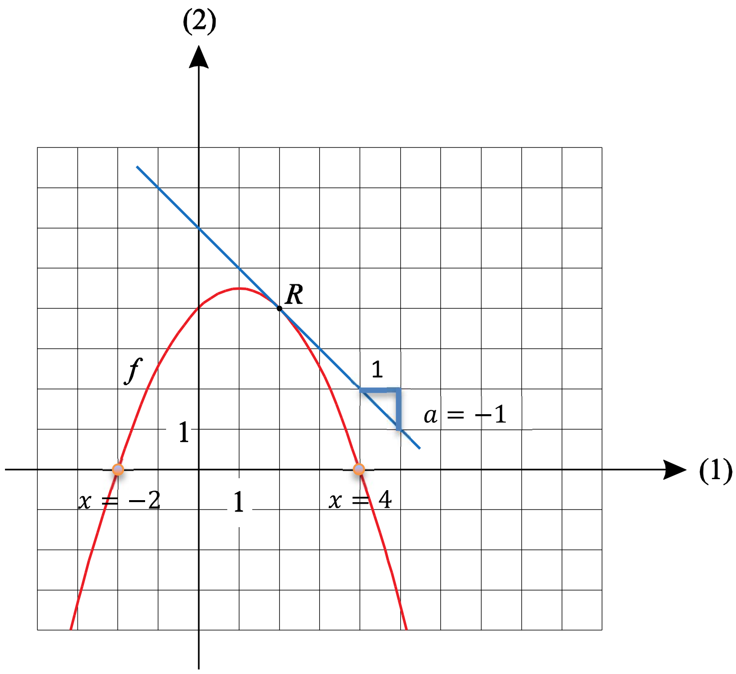
Arbejdsark 1 – grafisk forståelse

VIGTIGE BEGREBER

$f'(x_0)$ betyder grafisk ***tangenthældningen*** i x_0.

$f'(x_0)$ kaldes også ***differentialkvotienten*** eller ***væksthastigheden*** for f i x_0.

EKSEMPEL



Figuren viser grafen for en funktion f og tangenten til denne graf i punktet $R(2, 4)$.

a) Løs ligningen $f(x) = 0$ ved hjælp af figuren.
Bestem $f'(2)$ ved hjælp af figuren.

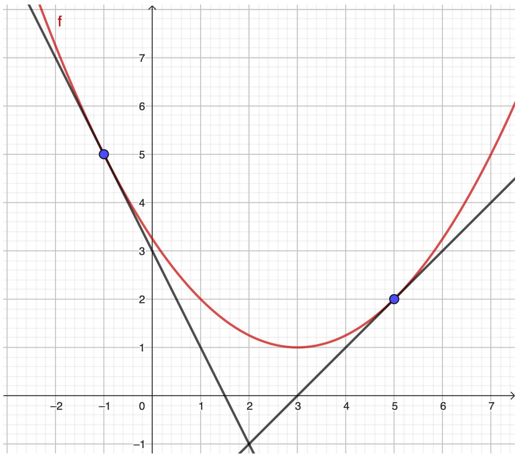
LØSNING

Da $f(x) = y$ løses $f(x) = 0$ ved at finde de x-værdier, hvor $y = 0$. Det er de steder, hvor grafen for f skærer x-aksen. Løsningen er derfor $x = -2$ eller $x = 4$.

$f'(2)$ betyder hældningen for tangenten til grafen for f i $x = 2$. $x = 2$ er i punktet R, hvor tangenten til grafen allerede er tegnet. Derfor aflæses hældningen for tangenten (markeret på figuren). Tangenthældningen er $a = -1$.
Derfor er $f'(2) = -1$.

Opgave 1

Figuren viser grafen for en funktion f, samt to af grafens tangenter.

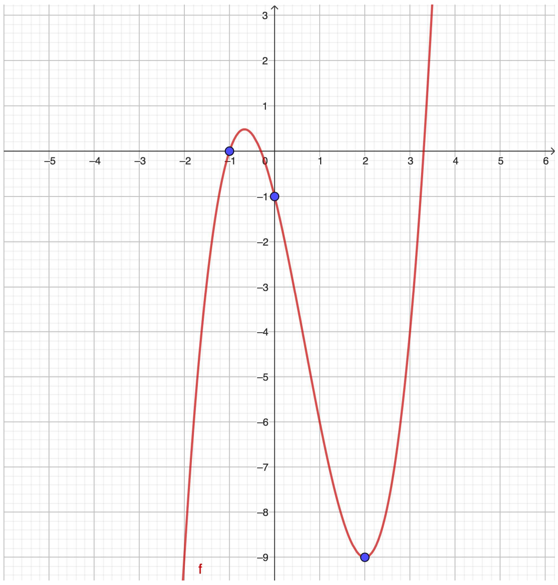


a) Aflæs hældningskoefficienten for hver af de to tangenter.

b) Aflæs derefter $f'(-1)\ =$ _____ og $f'(5)\ =$ _____ .

Opgave 2

Figuren viser grafen for en funktion f.



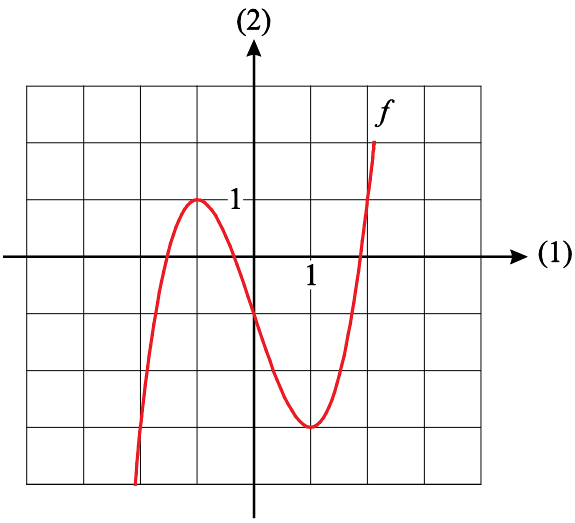
Bestem (dvs. tegn tangenter og aflæs deres hældning):

a) $f'(-1) =$

b) $f'(0) =$

c) $f'(2) =$

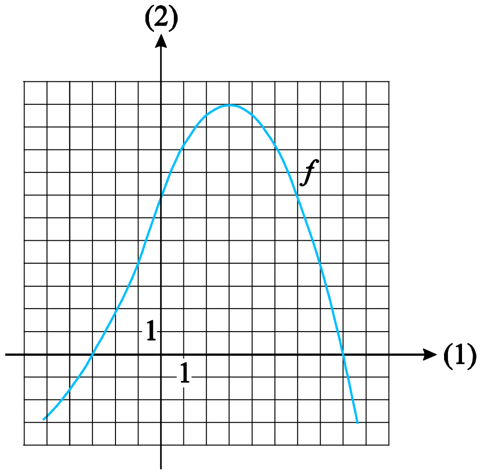
Opgave 3



Figuren viser grafen for en funktion f.

a) Bestem tallene $f(1)$ og $f'(1)$.
Illustrér på figuren (brug gerne bilaget) betydningen af de to tal.

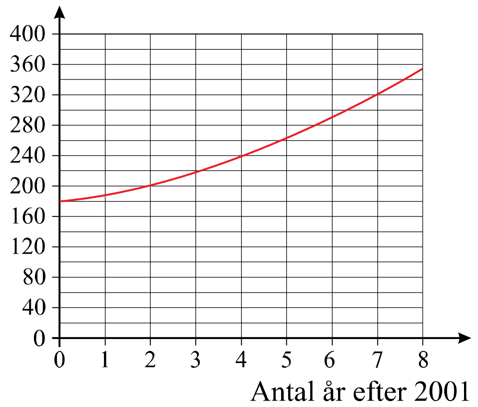
OPGAVE 4



Figuren viser grafen for en funktion *f*.

a) Løs ved hjælp af grafen ligningen $f(x)=0$.
Løs ved hjælp af grafen ligningen $f'(x)=0$.

OPGAVE 5



Den samlede gæld i landbruget i perioden 2001-2009 kan beskrives ved funktionen f.
Figuren viser grafen for f.

a) Benyt figuren til at bestemme tallene $f(6)$ og $f'(6)$.
Forklar, hvad disse tal fortæller om den samlede gæld i landbruget.

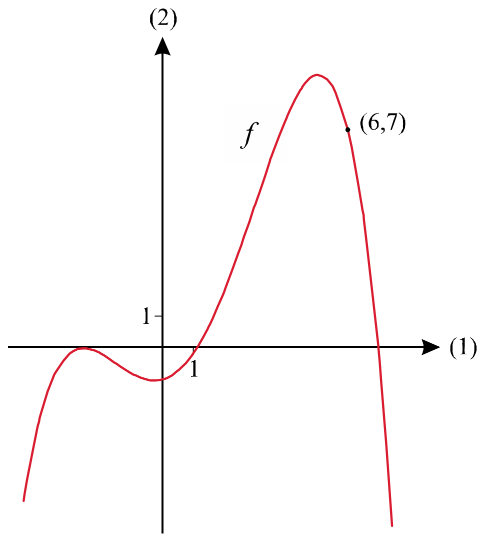
OPGAVE 6

Figuren viser grafen for en funktion f.
Grafen går gennem punktet (6, 7).

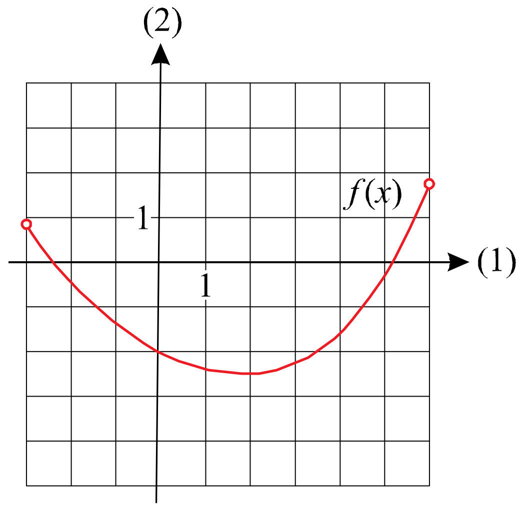
a) Hvilken af følgende tre muligheder kan være den rigtige?

1) $f'(6) = 7$
2) $f'(6) = 0$
3) $f'(6) = -4$.

Begrund svaret.



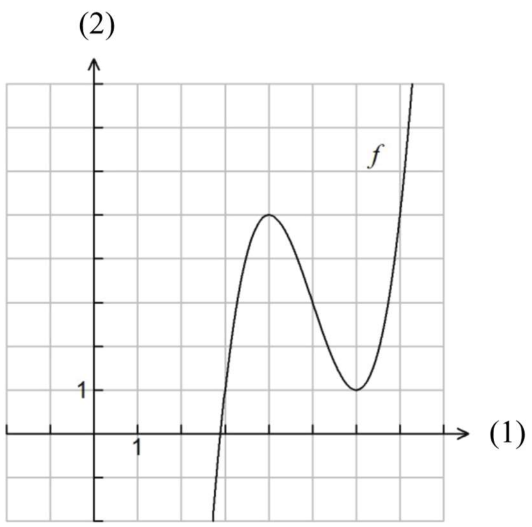
OPGAVE 7



Figuren viser grafen for en funktion $f(x)$.

a) Løs ved hjælp af grafen hver af ligningerne $f'(x) = 0$ og $f'(x) = 1$.

OPGAVE 8



Figuren viser grafen for en funktion f.

a) Løs ved hjælp af grafen ligningen $f'(x) = 0$.
For hvilke x er $f'(x)$ negativ?

2. TANGENTER I NSPIRE

– grafisk forståelse

VIGTIGE BEGREBER FRA SIDST

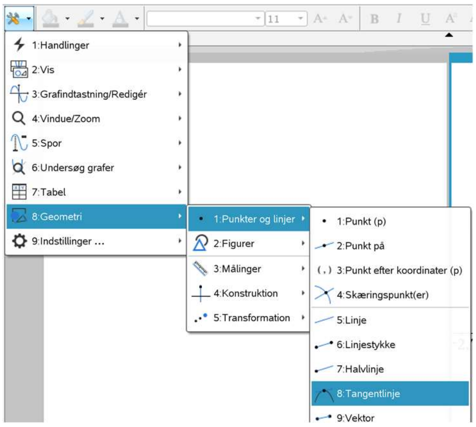
$f'(x_0)$ betyder grafisk *tangenthældningen* i x_0.

$f'(x_0)$ kaldes også ***differentialkvotienten*** eller ***væksthastigheden*** for f i x_0.

Øvelse 1

a) Tegn grafen for $f(x) = x^4 - x^3 - x^2 + x + 1$ i Nspire i grafvinduet $[-1{,}5; 1{,}5] \times [-0{,}5; 2]$.

b) Tegn en tangent til grafen for $f(x)$ i et vilkårligt punkt.



c) Højreklik på punkt, hvor tangenten rører grafen og vælg "Koordinater og ligninger" for at få vist røringspunktets koordinater.

d) Bestem $f'(-1)$ ved at tegne en tangent til grafen når $x = -1$ dvs. dobbeltklik på punktets x-koordinat og skriv -1. Aflæs tangentens hældningskoefficient.

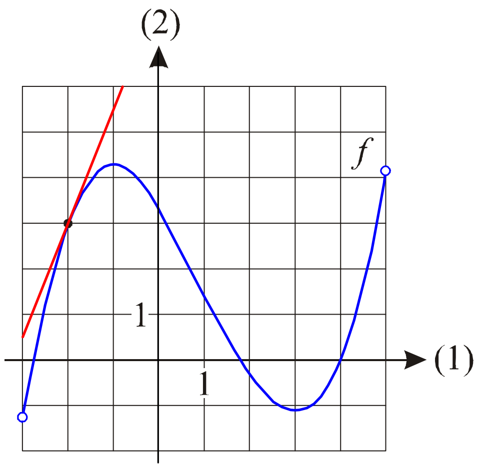
e) Snak med din sidemakker om i hvilke punkter på grafen det gælder, at $f'(x) = 0$? Bestem x-værdien til punkterne ved at bruge værktøjer i grafvinduet.

f) Tegn tangenter ind, hvor $f'(x) = 0$ og se, at det er rigtigt, at hældningskoefficienten er 0.

3. TANGENTER OG DIFFERENTIALKVOTIENTER

Grafisk forståelse.

OPGAVE 1



Figuren viser grafen for en differentiabel funktion f samt tangenten til denne graf i punktet $(-2,3)$.

a) Bestem $f'(-2)$.
   Løs ligningen $f'(x)=0$.

OPGAVE 2 (GRUPPEDISKUSSION/OPGAVE)

Om en funktion $f(x)$ oplyses følgende fortegnsskema for $f'(x)$:

x:		-3		1		6	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$+$

a) Hvordan kan grafen for denne funktion se ud, når fortegnene for $f'(x)$ skal passe med fortegnslinjen?

OPGAVE 3

Lav et fortegnsskema for $f'(x)$ når grafen for funktionen $f(x)$ er tegnet opgave 1.

4. AFLEDEDE FUNKTIONER OG DIFFERENTIALKVOTIENTER

Induktive undersøgelser

ØVELSE 1

a) Tegn grafen for $f(x) = x^2$ i Nspire

b) Undersøg nu tangenthældninger til grafen ved at indtegne en tangent og aflæse hældningen $f'(x_0)$, som du skal skrive ind i tabellen her.

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x_0)$							

c) Kan du ud fra tabellen gætte en formel for at bestemme $f'(x)$, når $f(x) = x^2$?

$f'(x) =$ __________

$f'(x)$ er en ny funktion (der kan beregne tangenthældninger).
Den nye funktion kalder vi *den afledede funktion* af f.

d) Brug din formel til at udregne tangenthældningen til grafen for f i følgende x-værdier og tjek dit resultat i Nspire:

   a. $x = 6$
   b. $x = 3{,}1$
   c. $x = \frac{1}{4}$

ØVELSE 2

a) Tegn grafen for $f(x) = \frac{1}{3}x^3$ i Nspire

b) Undersøg nu tangenthældninger til grafen ved at indtegne en tangent og aflæse hældningen $f'(x_0)$, som du skal skrive ind i tabellen her.

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x_0)$							

c) Kan du ud fra tabellen gætte en formel for at bestemme $f'(x)$, når $f(x) = \frac{1}{3}x^3$?

d) Brug din formel til at udregne tangenthældningen til grafen for f i $x = 5$. Tjek i Nspire.

ØVELSE 3

a) Tegn grafen for $f(x) = x^3$ i Nspire

b) Undersøg nu tangenthældninger til grafen ved at indtegne en tangent og aflæse hældningen $f'(x_0)$, som du skal skrive ind i tabellen her.

x_0	-3	-2	-1	0	1	2	3
$f'(x_0)$							

c) Kan du ud fra tabellen gætte en formel for at bestemme $f'(x)$, når $f(x) = x^3$?

d) Brug formlen til at udregne tangenthældningen til grafen for f i $x_0 = 5$.

5. AFLEDEDE FUNKTIONER $f'(x)$

Bestem de afledede funktioner $f'(x)$ for følgende funktioner:

OPGAVE 1

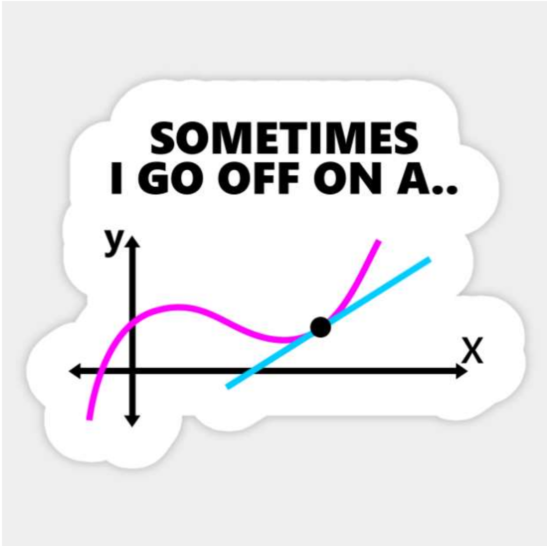
Funktion $f(x)$	Afledet funktion $f'(x)$
1. $f(x) = x^9$	$f'(x) =$
2. $f(x) = x^8$	$f'(x) =$
3. $f(x) = x^3$	
4. $f(x) = x^5$	
5. $f(x) = x^{11}$	
6. $f(x) = x^{-3}$	
7. $f(x) = x^{-5}$	
8. $f(x) = x^2$	
9. $f(x) = x^4$	
10. $f(x) = x^2 + x^3$	
11. $f(x) = x^8 + x^7$	
12. $f(x) = x + x^3$	
13. $f(x) = x^{-4} + x^2$	
14. $f(x) = 2x^2$	
15. $f(x) = 3x^4$	
16. $f(x) = -7x^3$	
17. $f(x) = 6x^2$	
18. $f(x) = 5x^2$	
19. $f(x) = 3x$	
20. $f(x) = -x^6$	

21. $f(x) = 6x^3$	
22. $f(x) = 3x^2 + 5x^7$	
23. $f(x) = 4x^5 - 3x^9 + 76$	
24. $f(x) = -230x + 234567$	
25. $f(x) = 45 - 5x$	
26. $f(x) = 4$	
27. $f(x) = 17x$	
28. $f(x) = 7x^4 + 8x^2 - 2$	
29. $f(x) = x^{1,5} + x^{4,7}$	
30. $f(x) = 12x^3 - 7x^2 - 43x - 1$	
31. $f(x) = e^{5x}$	
32. $f(x) = 0{,}5 \cdot x^6 - e^x + 7$	
33. $f(x) = 3e^{4x} + 27$	
34. $f(x) = \ln(x)$	
35. $f(x) = 3 \cdot \ln(x)$	
36. $f(x) = \sqrt{x}$	
37. $f(x) = \frac{1}{x}$	
38. $f(x) = 4 \cdot \frac{1}{x}$	
39. $f(x) = \frac{5}{x}$	
40. $f(x) = 5^x + 7e^{2x}$	

6. TANGENTENS LIGNING

Når vi ønsker at finder tangentens ligning i punket $(x_0, f(x_0))$, ønsker vi ofte at benytte følgende formel (156)

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$



At benytte denne formel består af fem trin.

1. Aflæs x_0.
2. Bestem $f(x_0)$ (punktets y-værdi) hvis den ikke er givet i opgaven.
3. Differentier $f(x)$ for at finde $f'(x)$.
4. Bestem $f'(x_0)$.
5. Indsætte i formlen og reducér.

EKSEMPEL

Opgave: En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + x^2 - 3$$

Bestem tangenten til f i punktet $(1, f(1))$

Løsning:

1. Da punktet har koordinaterne $(x_0, f(x_0))$ aflæses x_0:
$$x_0 = 1$$
2. Vi bestemmer $f(x_0) = f(1)$
$$f(1) = 1^3 + 1^2 - 3 = 1 + 1 - 3 = -1$$
3. Vi differentierer $f(x)$
$$f'(x) = 3x^2 + 2x$$
4. Vi bestemmer $f'(x_0) = f'(1)$
$$f'(1) = 3 \cdot 1^2 + 2 \cdot 1 = 3 \cdot 1 + 2 = 5$$
5. Vi indsætter i formlen for tangentens ligning
$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$
$$y = 5 \cdot (x - 1) + (-1)$$
$$y = 5x - 5 - 1$$
$$y = 5x - 6$$

Tangenten til f i punktet $(1, -1)$ har ligningen $y = 5x - 6$

OPGAVE 1

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^2 + x - 2.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

1. $x_0 = \_\_\_$
2. Vi bestemmer $f(x_0) = f(1)$

$$f(1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

3. Vi differentierer $f(x)$

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

4. Vi bestemmer $f'(x_0) = f'(1)$

$$f'(1) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

5. Vi indsætter i formlen for tangentens ligning

$$y = f'(1) \cdot (x - 1) + f(1)$$

$$y = \_\_ \cdot (x - \_\_) + \_\_$$

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

$$y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

Tangenten til f i punktet $(1, \_\_)$ har ligningen $y = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

OPGAVE 2

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^3 + 2x + 8.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

Brug samme trin som i opgave 1, men skriv det nu i dit hæfte.

OPGAVE 3

En funktion f er givet ved

$$f(x) = x^4 + 5x.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $\left(1, f(1)\right)$.

OPGAVE 4

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 2x^3 + 6.$$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $\left(-1, f(-1)\right)$.

OPGAVE 5

En funktion f er givet ved

$$f(x) = 4x + e^x.$$

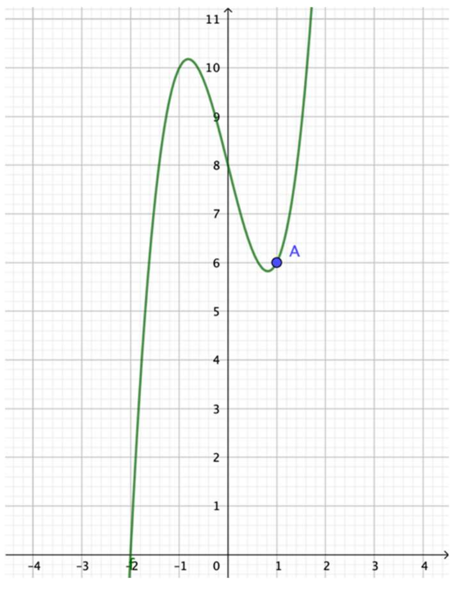
Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $\left(0, f(0)\right)$.

OPGAVE 6

Grafen for en funktion f er tegnet på figuren til højre.

Det oplyses, at $f'(x) = 6x^2 - 4$

Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet A.



7. DIFFERENTIALREGNING I NSPIRE

OPGAVE 1

Bestem de afledede funktioner til følgende funktioner i Nspire

a) $f(x) = -6x^5 - 3x^3 + 7x + 9$

b) $g(x) = \frac{4}{(x^4-5x)^3}$

c) $h(x) = 5x \cdot e^{6x}$

OPGAVE 2

En funktion er givet ved

$$f(x) = x^7 - 5x^3 + 2$$

a) Bestem $f'(5)$ og forklar betydningen af tallet.

b) Løs ligningen $f'(x) = 0$ og gøre rede for løsningernes betydning

c) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $(1, f(1))$.

d) Tegn grafen for f og tangenten, du har fundet i c) og tjek, dit resultat.

OPGAVE 3

En funktion er givet ved $g(x) = -3x^2 + 8x - 4$

a) Bestem $g'(x)$.

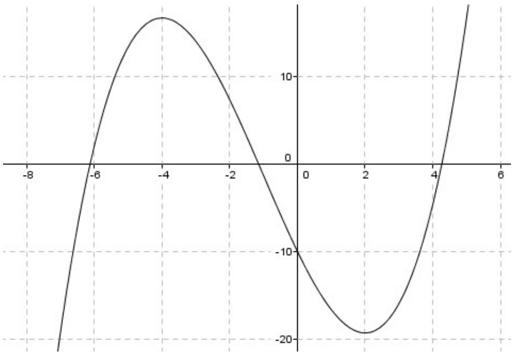
b) Løs ligningen $g'(x) = 10$ og fortolk resultatet.

c) Bestem den x-værdi, hvor tangenten til grafen for g har en hældning på -5.

d) Opstil og løs en ligning, der kan finde den x-værdi, hvor grafen for $g(x)$ har vandret tangent.

8. FORTEGNSLINJER

ØVELSE 1



Vi kan beskrive grafens forløb (monotoniforhold) ved hjælp af fortegn for tangenthældninger.

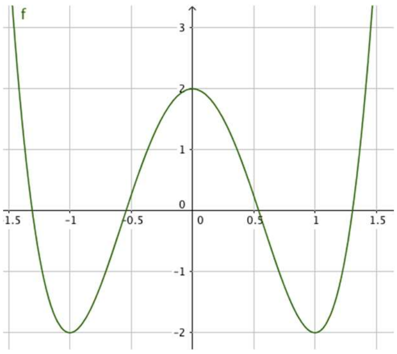
I dette eksempel aflæses først de steder, hvor funktionen har en vandret tangent. Derefter udfyldes resten af skemaet.

x		-4		2	
$f'(x)$	+	0	-	0	+

a) Snak med din sidemakker om, hvorfor fortegnslinjen ser ud, som den gør ud fra grafen.

ØVELSE 2

Grafen for $f(x)$ er tegnet på figuren.

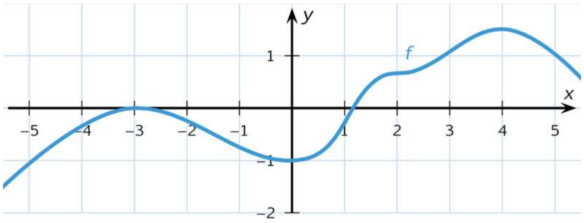


a) Udfyld resten af fortegnslinjen for $f'(x)$

x		-1		0		1	
$f'(x)$		0		0		0	

ØVELSE 3

Grafen for en funktion $f(x)$ er tegnet på figuren.



a) Udfyld fortegnslinjen for $f'(x)$, der er begyndt under grafen.

x		-3		0		2		4	

Opgave 4

Tegn en mulig graf for funktion f ud fra fortegnslinjen for $f'(x)$ i dit hæfte:

x		-3		2		4	
$f'(x)$	+	0	-	0	+	0	-

Opgave 5

En differentiabel funktion f opfylder følgende:

$$f(-1)=3 \quad \text{og} \quad f(2)=-4\,.$$

Nulpunkter og fortegn for $f'(x)$ er angivet på tallinjen:

x :		-1		2	
$f'(x)$:	$+$	0	$-$	0	$+$

a) Skitsér grafen for f.
(Der er mange muligheder for, hvordan grafen kan se ud. Der ønskes kun tegnet én mulig graf.)

Opgave 6

En differentiabel funktion f opfylder, at

$$f(1)=4$$

og at fortegn og nulpunkter for f' er som givet på fortegnslinjen:

x		1	
$f'(x)$	$-$	0	$+$

a) Gør rede for, at ligningen $f(x)=2$ ikke har en løsning.

9. MONOTONIFORHOLD I NSPIRE

For at bestemme monotoniforhold i Nspire skal vi:

1. Bestem $\boldsymbol{f'(x)}$**.**
2. Beregne de $\boldsymbol{x}$**-værdier**, hvor tangenten er vandret (hvor $f'(x) = 0$).
   Det er ofte der, hvor grafen har et ekstremumspunkt, men der være punkter på grafen, hvor vi kan tegne en vandret tangent, men uden der er tale om et minimumspunkt eller maksimumspunkt.
3. **Tegne grafen for** $\boldsymbol{f(x)}$ og se, hvordan den ser ud før mellem og efter ekstremumspunkterne.
4. **Opskrive monotoniforholdene**.

ØVELSE 1

Lav eksemplet herunder i et nyt Nspiredokument, som du gemmer under navnet "Monotoniforhold". Du skal skrive og gøre præcis, som vist på billedet, så dit Nspire-dokument kommer til at se præcis ud som på billedet.

Eksempel

Funktionen er givet ved

$\mathbf{f}(x):=4\cdot x^3-3\cdot x^2-3\cdot x+2$ ▸ *Udført*

For at bestemme monotoniforhold differentieres f(x).

$f'(x)=\mathbf{fm}(x):=\frac{d}{dx}(\mathbf{f}(x))$ ▸ *Udført*

$\mathbf{fm}(x)$ ▸ $12\cdot x^2-6\cdot x-3$

Ligningen f'(x)=0 løses for at bestemme mulige ekstremumssteder:

$\text{solve}(\mathbf{fm}(x)=0,x)$ ▸ $x=^-0.309017$ or $x=0.809017$

Løsningen er x=−0,31 eller x=0,81

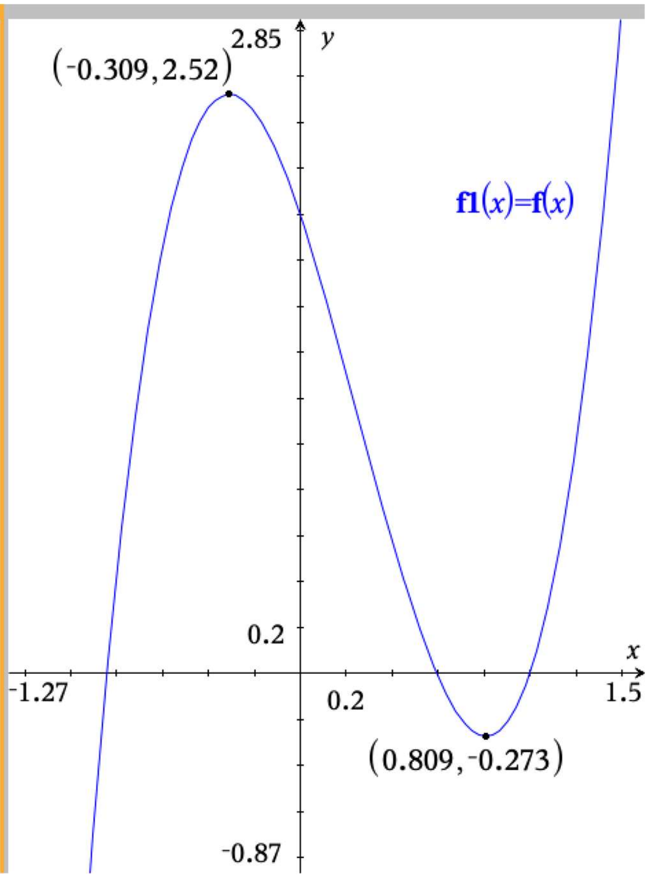
Grafen for f tegnes, så løsningerne ses.

Ud fra grafen og løsningerne opskrives nu monotoniforhold:

f er voksende for x∈]−∞;−0,31]

f er aftagende for x∈[−0,31;0,81]

f er voksende for x∈[0,81;∞[



ØVELSE 2

Bestem på samme måde som før monotoniforhold for funktionen $f(x) = x^4 - 2x^2 + 4$.

10. MONOTONIFORHOLD I HÅNDEN

At bestemme monotoniforholdene for en funktion vil sige at vi ønsker at bestemme i hvilke intervaller funktionen er voksende, aftagende eller konstant. Vi har set det gjort i Nspire, og nu skal vi hvordan vi gør i hånden.

Til dette kan vi benytte differentialregning, da der i et lokalt maksimum eller minimum vil være en vandret tangent dvs. at tangentens hældning er lig 0 ($f'(x) = 0$).

Desuden gælder, at

1. Hvis $f'(x) > 0$ i et interval er funktionen voksende i det interval
2. Hvis $f'(x) < 0$ i et interval er funktionen aftagende i det interval.

STOP! Overvej, hvorfor det gælder

Bestemmelse af monotoniforhold i hånden

1. Vi skal først **bestemme $f'(x)$**.
2. Vi **løser $f'(x) = 0$** for at finde de x-værdier hvor der er vandrette tangenter og dermed mulige lokale ekstrema.
3. Vi **indsætter x-værdier i $f'(x)$** som ligger i intervallerne før, mellem og efter x-værdierne, du fik i løsningen i punkt 2 for at konkludere om funktionen er voksende eller aftagende i disse intervaller.
4. Vi laver og **udfylder en fortegnslinje for $f'(x)$** med resultaterne fra punkt 3.
5. Til sidst **opskriver vi monotoniforholdene** for f (dvs. intervallerne hvor f er aftagende eller voksende).

EKSEMPEL

Vi ønsker at bestemme monotoniforholdene for funktionen $f(x) = x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 18x + 4$

1. Vi bestemmer $f'(x)$

$$f'(x) = 3x^2 - \frac{3}{2} \cdot 2x - 18 = 3x^2 + 3x - 18$$

2. Vi ønsker at løse $f'(x) = 0$ for at finde mulige lokale ekstrema

Vi løser derfor $3x^2 + 3x - 18 = 0$

STOP! Overvej, hvorfor det gælder

Det er en andengradsligning så vi benytter diskriminantformlen til at løse den

$$a = 3, b = 3, c = -18$$

Vi beregner diskriminanten

$$d = b^2 - 4 \cdot a \cdot c$$

$$d = 3^2 - 4 \cdot 3 \cdot (-18) = 9 + 216 = 225$$

Da $d > 0$ er der 2 løsninger:

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \text{ eller } x_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

$$x_1 = \frac{-3 - \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 - 15}{6} = -\frac{18}{6} = \mathbf{-3}$$

$$x_2 = \frac{-3 - \sqrt{225}}{2 \cdot 3} = \frac{-3 + 15}{6} = \frac{12}{6} = \mathbf{2}$$

STOP! Forstår du løsningen af ligningen?

De vandrette tangenter og dermed de mulige lokale ekstrema er altså ved $x = -3$ og $x = 2$. **Disse tal skrives ind på fortegnslinjen i punkt 4**.

3. Vi indsætter x-værdier i $f'(x)$ som er mindre end, mellem og større end x-værdierne, som vi har fundet i punkt 2. for at undersøge om funktionen er voksende eller aftagende i disse intervaller.

   I dette eksempel skal vi vælge 3 x-værdier: en x-værdi mindre end -3, en x-værdi mellem -3 og 2 og en større end 2.
   Vi vælger tallene $x = -4$, $x = 0$ og $x = 3$ og indsætter i $f'(x)$.

   STOP! Overvej om du forstår dette.

$$f'(-4) = 3 \cdot (-4)^2 + 3 \cdot (-4) - 18 = 3 \cdot 16 - 12 - 18 = 48 - 30 = 18$$

$$f'(0) = 3 \cdot (0)^2 + 3 \cdot (0) - 18 = -18$$

$$f'(3) = 3 \cdot (3)^2 + 3 \cdot (3) - 18 = 3 \cdot 9 + 9 - 18 = 18$$

4. Vi laver en fortegnslinje og udfylder den.
   Øverst er en tallinje, hvorpå x-værdierne fra løsningen til ligningen i punkt 2 skrives.
   Under er angivet fortegnet for $f'(x)$. Vi skriver 0 under de to løsninger, da det er her tangentens hældning er 0. Ud fra vores udregninger i punkt 3 skrives + eller – alt efter om $f'(x)$ er positiv eller negativ. Da vi fx fik $f'(-4) = 18$, må tangenthældningerne for $x < -3$ være positive. Derfor skriver vi et plus.
   Nederst er der tegnet pile for grafen for $f(x)$. Når $f'(x)$ er positiv går pilen opad (f er voksende) og når $f'(x)$ er negativ går pilen nedad (f er aftagende).

   STOP! Overvej om du forstår dette afsnit om at udfylde fortegnslinjen.

$\boldsymbol{x}$		$\mathbf{-3}$		$\mathbf{2}$	
$\boldsymbol{f'(x)}$	$+$	0	$-$	0	$+$
$\boldsymbol{f(x)}$	↗		↘		↗

5. Monotoniforholdene kan nu opskrives ud fra fortegnslinjen:

   ***f* er voksende i intervallerne** $]-\infty; \mathbf{-3}]$ **og** $[\mathbf{2}; \infty[$

   ***f* er aftagende i intervallet** $[\mathbf{-3}; \mathbf{2}]$

   STOP! Overvej om du forstår dette.

Opgaver til monotoniforhold i hånden

Opgave 1

En funktion f er givet ved $f(x) = x^2 - 6x + 4$

Bestem monotoniforholdene for f.

1. Først bestemmes $f'(x)$

$$f'(x) = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$$

2. Dernæst løses ligningen $f'(x) = 0$ for at finde de x-værdier, hvor der er vandrette tangenter og derfor mulige lokale ekstrema.

$$f'(x) = 0$$

$$\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ = 0$$

3. Der indsættes x-værdier i $f'(x)$ for intervallerne omkring det mulige lokale ekstremum for at bestemme fortegnet af $f'(x)$.

$$f'(\_\_) =$$

$$f'(\_\_) =$$

4. En fortegnslinje udfyldes

$\boldsymbol{x}$		____	
$\boldsymbol{f'(x)}$	____	0	____
$\boldsymbol{f(x)}$			

5. Monotoniforholdene opskrives:

f er ______________ i intervallerne/intervallet

f er ______________ i intervallerne/intervallet

OPGAVE 2

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4$

Bestem monotoniforholdene for f. Skriv opgaven ned i dit hæfte/papir.

OPGAVE 3

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 3x^2 - 9x$.

Bestem monotoniforholdene for f.

OPGAVE 4

En funktion f er givet ved $f(x) = x^3 - 4x^2 + 4x + 5$.

Bestem monotoniforholdene for f.

OPGAVE 5

En funktion f er givet ved $f(x) = 7x + 9$.

Bestem $f'(x)$ og brug denne til at gøre rede for at funktionen altid er voksende.

OPGAVE 6 (SVÆR OPGAVE)

En funktion f er givet ved $f(x) = 2x^3 - 2x^2 + 14x$

Bestem $f'(x)$ og brug denne til at gøre rede for at funktionen altid er voksende.

11. VÆKSTHASTIGHED

Som vi tidligere har lært kan $f'(x_0)$ betegnes med tre forskellige begreber: differentialkvotient i x_0, tangenthældningen i x_0, den afledede funktion i x_0 og nu skal vi se, at den også kan forstås som væksthastigheden i x_0.

Når vi arbejder med modellering (virkelige data), er det ofte betegnelsen væksthastighed, vi benytter for $f'(x_0)$, som betyder, hvor hurtigt noget vokser eller aftager på et bestemt tidspunkt (x_0).

EKSEMPEL PÅ REGNING AF VÆKSTHASTIGHED:

I en model for udviklingen i vægten for hunkalkuner fra en bestemt race gælder, at

$$f(x) = 0{,}0038 \cdot x^4 - 0{,}42 \cdot x^3 + 12{,}12 \cdot x^2 + 24{,}13 \cdot x + 16{,}67,$$

hvor $f(x)$ er vægten af hunkalkunen (målt i gram), og x er alderen af hunkalkunen (målt i uger).

Hvis vi ønsker at finde ud hvor hurtigt hunkalkunernes vægt vokser på et givet tidspunkt, så er det væksthastigheden vi ønsker at bestemme.

Lad os prøve at bestemme væksthastigheden efter 4 uger.

$f(x):=0.0038\cdot x^4-0.42\cdot x^3+12.12\cdot x^2+24.13\cdot x+16.67$ ▸ *Udført*

x er alderen på hunkalkunen i uger

f(x) er vægten af hunkalkunen i gram.

a) Vi vil bestemme væksthastigheden af kalkunens vægt efter fire uger dvs. f '(4).

Vi bestemmer f'(x)

f'(x)=$fm(x):=\frac{d}{dx}(f(x))$ ▸ *Udført*

$fm(x)$ ▸ $0.0152\cdot x^3-1.26\cdot x^2+24.24\cdot x+24.13$

Vi bestemmer f'(4)

$fm(4)$ ▸ 101.903

f'(4)=101,9, og det betyder, at ifølge modellen vokser kalkunens vægt med en hastighed på 101,9 gram pr. uge, når kalkunen er 4 uger gammel.

Konklusionen på opgaven her er altså:

Hunkalkunens vægt vokser med 101,9 gram pr. uge når kalkunen er 4 uger ifølge modellen.

101,9 er $f'(x_0)$ og har enheden fra $f(x)$ pr. enheden fra x og 4 er x_0 og har enheden fra x.

OPGAVE 1

I en model er udviklingen i antallet af tigre i Indien bestemt ved

$$f(x) = 3600 \cdot 0.8544^x,$$

hvor $f(x)$ er antallet af tigre x år efter 2012.

a) Bestem $f'(4)$ og $f'(9)$ og giv en fortolkning af disse tal.

OPGAVE 2

I en model kan antallet af kaniner i en population bestemmes ved en funktion f, hvor $f(x)$ er antallet af kaniner i populationen efter x dage. Det oplyses, at $f(30) = 514$ og $f'(30) = 7$.

a) Giv en fortolkning af tallene $f(30) = 514$ og $f'(30) = 7$

OPGAVE 3 (GAMMEL EKSAMENSOPGAVE)

Husk at definere funktionen med det rigtige **e** i Nspire.

I en model kan udbredelsen af malaria i et bestemt land siden 2007 beskrives ved funktionen

$$N(t) = \frac{709,8}{1 + 0,844 \cdot e^{-0,828 \cdot t}} ,$$

hvor $N(t)$ betegner det samlede antal smittede til tidspunktet t (målt i antal år efter 2007).

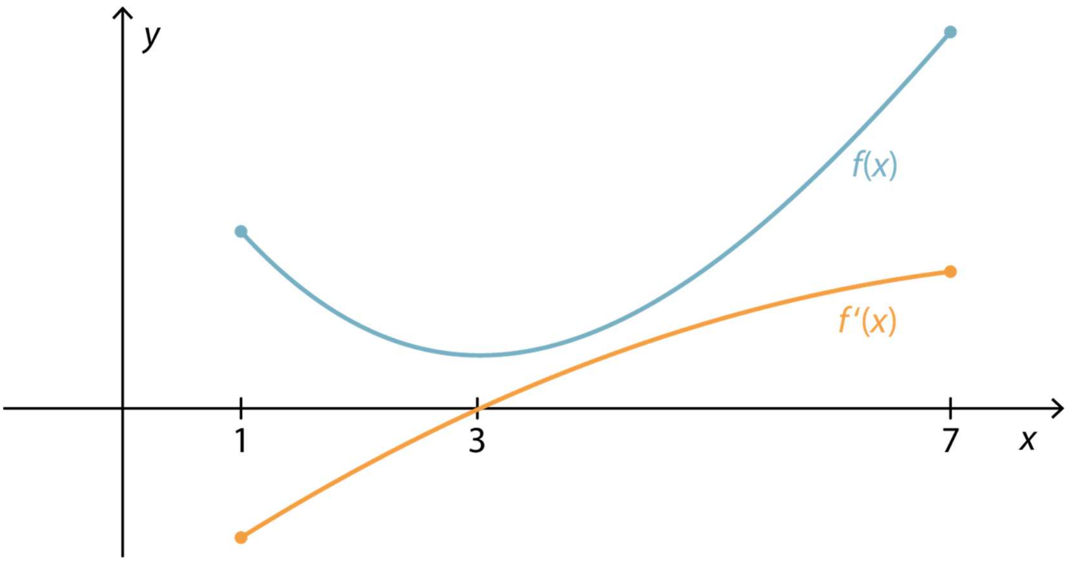
a) Tegn grafen for N, og benyt modellen til at bestemme det samlede antal smittede i år 2009.

b) Benyt modellen til at bestemme det tidspunkt, hvor det samlede antal smittede er 700.

c) Bestem $N'(3)$, og giv en fortolkning af tallet.

12. SAMMENHÆNGEN MELLEM GRAFEN FOR f OG f'

EKSEMPEL



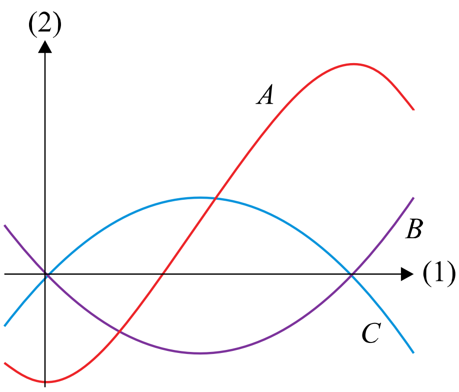
Den orange graf er grafen for $f'(x)$, da den skærer x-aksen, når den blå graf ($f(x)$) har en vandret tangent hvor $f'(x) = 0$ (minimum).

Derudover ses, den orange graf ligger under x-aksen ($f'(x) < 0$), når $f(x)$ aftager og den orange ligger over x-aksen ($f'(x) > 0$), når $f(x)$ vokser.

Prøv at bruge samme argumentation på opgaverne herunder

OPGAVE 1

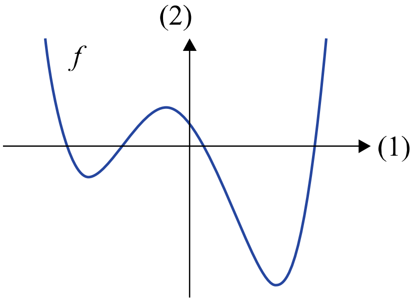
På figuren ses en skitse af graferne for tre funktioner $f(x)$, $g(x)$ og $f'(x)$.



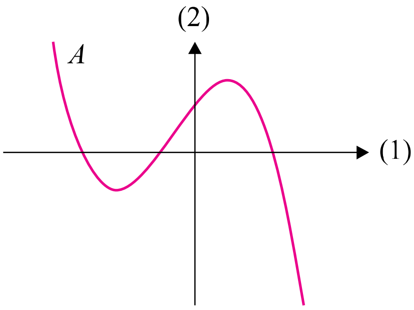
Gør rede for, hvilken graf der hører til hvilken funktion.

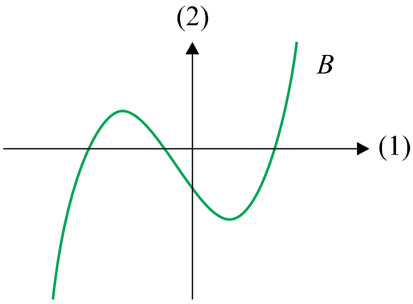
OPGAVE 2

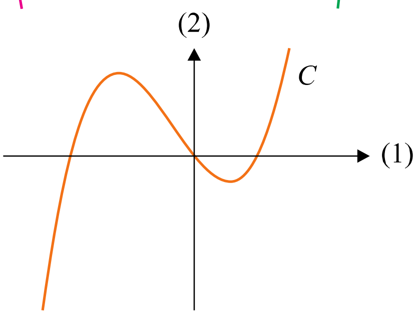
På figuren ses grafen for en funktion f.



Det oplyses, at en af nedenstående tre grafer A, B eller C er graf for f'.



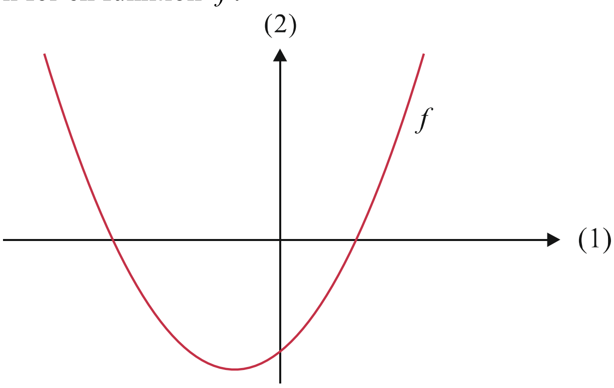




a) Gør rede for, hvilken af de tre grafer, der er graf for f'.

OPGAVE 3

På figuren ses grafen for en funktion f.



a) Tegn en mulig graf for f'.

Afledede funktioner

		Funktion $f(x)$	Afledet funktion $f'(x)$
Lineære funktioner	(162)	k	0
	(163)	x	1
	(164)	$a \cdot x$	a
Eksponentialfunktioner	(165)	e^x	e^x
	(166)	$e^{k \cdot x}$	$k \cdot e^{k \cdot x}$
	(167)	a^x	$a^x \cdot \ln(a)$
Potensfunktioner	(168)	x^a	$a \cdot x^{a-1}$
	(169)	$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$
	(170)	$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$
Logaritmefunktion	(171)	$\ln(x)$	$\frac{1}{x}$
Trigonometriske funktioner	(172)	$\cos(x)$	$-\sin(x)$
	(173)	$\sin(x)$	$\cos(x)$

Regneregler for differentiation

Konstant gange funktion (174) $\left(k \cdot f(x)\right)' = k \cdot f'(x)$

Eksempel:
Hvis $f(x) = 4 \cdot x^2$,
så er $f'(x) = 4 \cdot 2x = 8x$

Sum (175) $\left(f(x) + g(x)\right)' = f'(x) + g'(x)$

Eksempel:
Hvis $f(x) = x^2 + \sqrt{x}$,
så er $f'(x) = 2x + \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Differens (176) $\left(f(x) - g(x)\right)' = f'(x) - g'(x)$

Eksempel:
Hvis $f(x) = x^2 - \sqrt{x}$,
så er $f'(x) = 2x - \frac{1}{2\sqrt{x}}$

Produkt (177) $\left(f(x) \cdot g(x)\right)' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$

Eksempel:
Hvis $f(x) = \mathrm{e}^{3x} \cdot \ln(x)$,
så er $f'(x) = 3\mathrm{e}^{3x} \cdot \ln(x) + \mathrm{e}^{3x} \cdot \frac{1}{x}$

Sammensat funktion (178) $\left(f\left(g(x)\right)\right)' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$

Eksempel:
Hvis $f(x) = (x^2 + 3x - 1)^4$,
så er $f'(x) = 4 \cdot (x^2 + 3x - 1)^3 \cdot (2x + 3)$

Kvotient (179) $\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$