KOMBINATORIK

Tælleprincipper

2c Ma

2026

KOMBINATORIK - TÆLLEPRINCIPPER

Sætning 1: Multiplikationsprincippet ("BÅDE-OG"-princippet)

Vi antager, at et valg kan opdeles i en række uafhængige delvalg 1, 2, 3..., og at antallet af muligheder i delvalgene er henholdsvis $n_1, n_2, n_3 \ldots$.

Når vi **både** skal foretage delvalg 1 **og** delvalg 2 **og** delvalg 3... , så er antallet af muligheder for det samlede valg givet ved

$$n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \ldots$$

Sætning 2: Additionsprincippet ("ENTEN-ELLER" princippet)

Vi antager, at et valg består i **enten** at foretage valg 1 **eller** valg 2 **eller** valg 3..., og at antallet af muligheder i hver af disse er henholdsvis $n_1, n_2, n_3 \ldots$.

Antallet af muligheder for det samlede valg er da givet ved

$$n_1 + n_2 + n_3 + \ldots$$

OPGAVE 1

På en restaurant kan du vælge mellem 12 pastaretter, 9 slags tilbehør, 15 slags drikkevarer og 8 forskellige desserter. Hvor mange menuer kan vi vælge imellem, når en menu består af én pastaret, tilbehør, drikkevarer og dessert?

Opskriv en beregning og notér hvilke/hvilket af ovenstående principper du anvender:

OPGAVE 2

På en anden restaurant kan du vælge mellem 4 forretter, 3 hovedretter og 5 slags desserter. Der er 2 muligheder for at vælge en menu: enten forret med hovedret eller hovedret med dessert.

a) Hvor mange forskellige menuer kan laves?
Opskriv en beregning og notér hvilke principper fra s. 1, du anvender:

b) Lav et tælletræ, der illustrerer situationen.

OPGAVE 3

Opgave 1. På hvor mange måder kan nedenstående skema fyldes ud med kryds og boller?

Eksempel:

×	○	×
×	×	×
○	×	×

A) $9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ B) $2 \cdot 9$ C) 2^9 D) 9^2 E) $3 \cdot 2 \cdot 2$

OPGAVE 4

I en skål A, B og C er der henholdsvis 5, 7 og 9 frugter. Alle frugterne er forskellige.

a. Hvor mange muligheder er der, hvis du kun må tage én frugt?
b. På hvor mange måder kan du vælge to frugter, hvor den ene kommer fra skål A og den anden fra skål B?
c. På hvor mange måder kan du vælge tre frugter, hvor de kommer fra hver sin skål?
d. På hvor mange måde kan du vælge to frugter, hvis de ikke må komme fra samme skål?

OPGAVE 5

Du vil gerne lave en ny kode til dit Uni-Login. Du må bruge små bogstaver, store bogstaver og tal.

a. Hvor mange muligheder har du, hvis du skal lave en kode, der er enten 3 eller 4 eller 5 tegn lang?

OPGAVE 6

Tag 4 genstande fra dit penalhus.

a. Hvor mange forskellige rækkefølger kan de lægges op i?
b. Hvis den længste af genstandene skal ligge forrest, hvor mange mulige rækkefølger er der så?
c. Hvis den længste af genstandene ikke må ligge forrest, hvor mange mulige rækkefølger er der så?

FAKULTET

Definition 1: Fakultet

Hvis n er et helt positivt tal, er

$$n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot (n-1) \cdot n$$

Herudover sættes "0 fakultet" til 1, dvs. $0! = 1$.

n! udtales ”n fakultet”

1! = 1

2! = 2·1 = 2

3! = 3·2·1 = 6

4! = 4·3·2·1 = 24

5! = 5·4·3·2·1 = 120 osv.

OPGAVE 7

a) $\frac{7!}{5!}$

b) $\frac{9!}{5!} =$

c) $\frac{6!}{3!} =$

Ekstra svære (spring over hvis du er i tvivl):

d) $\frac{(n+1)!}{n!} =$

e) $\frac{(n+2)!}{(n-1)!} =$

OPGAVE 8

I den italienske fodboldklub Juventus skal der udtages en trup på 11 spillere, der skal på banen.

På hvor mange forskellige måder kan træneren placere de 11 spiller i opstillingen? (her antages det, at alle spillere kan klare alle pladser på banen: målmand, venstre back osv.)

PERMUTATIONER (RÆKKEFØLGEN ER VIGTIG)

> **Definition 7.2.2 (Permutation)**
>
> Givet en endelig mængde $A = \{ a_1, a_2, \dots, a_n \}$.
>
> En *permutation* af elementerne i A er en opstilling af elementerne i A i en bestemt rækkefølge.

Eksempel:

En mængde skrives med mængdeklammer $\{\dots\}$.

Den største mængde *du* kender inden for matematik, er mængden af alle de reelle tal $\mathbb{R}$.

En mængde A, som har tre elementer rød, gul og grøn kan skrives: A = $\{rød, gul, grøn\}$

OPGAVE 9

Antallet af permutationer angiver antallet af de **rækkefølger**, du kan opstille af de tre farver rød, gul og grøn:

Hvis rød kommer først, har du mulighederne:	rød	gul	grøn
	Rød	_______	_______
Hvis gul kommer først, har du mulighederne:	gul	_______	_______
	Gul	_______	_______
Hvis grøn kommer først, har du mulighederne:	grøn	_______	_______
	Grøn	_______	_______

Hvor mange permutationer (altså antal rækkefølger) findes i alt?: ____________

r-permutation

> **Definition 7.2.4 (r-permutation i n-mængde)**
>
> Givet en n-mængde A og et helt tal r, $0 \leq r \leq n$.
>
> En *r-permutation* af elementerne i A er en opstilling af r elementer fra A i én bestemt rækkefølge.

EKSEMPEL:

I en mængde med 10 elementer, er en 4-permutation en bestemt rækkefølge af 4 elementer taget ud af de 10, som er i alt. Hvor mange 4-permutationer findes? Altså hvor mange forskellige rækkefølger af 4 elementer kan opstilles, når vi har 10 forskellige at vælge imellem? Det findes der en sætning for:

ANTAL R-PERMUTATIONER UD AF N MULIGE

> **Sætning 7.2.2 (Antal permutationer $P(n,r)$)**
>
> Givet en n-mængde A og et helt tal r, $0 \leq r \leq n$.
>
> Så er antallet af r-permutationer $P(n,r)$ i A
>
> $$P(n,r) = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-(r-1)) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

OPGAVE 10

Du har taget din telefon med til Rom. Et ringesignal på telefonen består af 3 forskellige toner udvalgt af stamtonerne c, d, e, f, g, a, h.

Hvor mange forskellige ringesignaler kan der laves ud af de 7 stamtoner?

Hint: brug teorien ovenfor.

OPGAVE 11

Du rejser i tog. I er i alt 12 personer, som skal afsted, men kun 3 af jer er heldige at kunne købe pladsbilletter til toget.

På hvor mange forskellige måder kan I fordele de 3 faste siddepladser imellem jer?

Hint: brug teorien ovenfor.

OPGAVE 12

Du tager til et galopløb. Der er 10 heste med i løbet, og der er pengepræmier til 1. pladsen og 2. pladsen.

På hvor mange måder kan pengepræmierne fordeles på?

Hint: brug teorien ovenfor.

KOMBINATIONER

Når **rækkefølgen er underordnet** tales om antal kombinationer (versus permutationer, hvor rækkefølgen har betydning).

r-kombination

> **Definition 7.3.1 (r-kombination af n-mængde)**
>
> Givet en n-mængde A og et helt tal r, $0 \leq r \leq n$.
>
> En delmængde bestående af r elementer fra A kalder vi for *en r-delmængde* af A eller *en r-kombination* af A.

OPGAVE 13

a) Opskriv antallet af **2-permutationer** ud at de tre mulige farver rød, gul og grøn:

Hvis rød kommer først, har du mulighederne:	rød	gul
	Rød	grøn
Hvis gul kommer først, har du umulighederne:	gul	______
	Gul	______
Hvis grøn kommer først, har du mulighederne:	grøn	______
	Grøn	______

Hvor mange permutationer (altså antal rækkefølger) findes i alt?: _______

Beregn også om antallet af passer med formlen for $P(n, r)$:

b) Opskriv nu antallet af **2-kombinationer**, du kan opstille af de tre farver rød, gul og grøn:

Hvis du bruger farven rød har du mulighederne:	rød	gul
	Rød	______
Hvis du bruger farven gul har du muligheden:	gul	______ (rød *er* brugt)

Når du vil vælge farven grøn, har du ingen muligheder, fordi både grøn-rød og grøn-gul *er* brugt.

Hvor mange kombinationer findes i alt?: _______

DER FINDES ALTSÅ FLERE ANTAL PERMUTATIONER END ANTAL KOMBINATIONER.

OPGAVE 14

Opskriv alle 2-kombinationer af mængden $A = \{a, b, 1, 2\}$

Opskriv med mængdetegn: $\{a, b\}$ osv.

Hint: der bør være 6 i alt.

OPGAVE 15

Opskriv alle 3-kombinationer af mængden $B = \{x, y, z, w\}$

Opskriv med mængdetegn: $\{x, y, z\}$ osv.

Hint: der bør være 4 i alt.

Antal r-kombinationer ud af n mulige (binomialkoefficient)

> **Sætning 7.3.1 (Antal r-kombinationer)**
>
> Lad A være en n-mængde og r et helt tal, $0 \leq r \leq n$.
>
> Så er antallet af r-kombinationer af A givet ved
>
> $$K(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!r!}$$

OPGAVE 16

Beregn binomialkoefficienterne:

a) $K(8,2) =$

b) $K(12,8) =$

c) $K(5,4) =$

OPGAVE 17

En klasse er på tur med 29 elever. De skal vælge, hvem der skal være på et oprydningshold bestående af 4 personer.

På hvor mange måder kan klassen vælge oprydningsholdet?

Opskriv en beregning ved brug af teorien ovenfor.

OPGAVE 18

En klasse består af 13 piger og 16 drenge. Der skal nu udvælges 2 piger OG 3 drenge, som får lov at tage på tur. De andre skal vente på Peterspladsen.

På hvor mange måder kan klassen vælge gruppen, som skal på tur?

Hint: brug teorien om binomialkoefficienter OG teorien om valgmuligheder på side 1.

OPGAVE 19

Du spiller kort. På hvor mange måder kan du få en hånd, som består af 4 klør, 2 ruder, 6 hjerter og 1 spar?

Hint: brug teorien om binomialkoefficienter OG teorien om valgmuligheder på side 1.

OPGAVE 20

Du sidder i en skov og der kommer en flok dyr forbi

Flokken består af 10 får, 3 geder og 2 ulve.

På hvor mange måde kan vi vælge 6 dyr fra flokken, når

a) du vælger mellem dyrene frit?

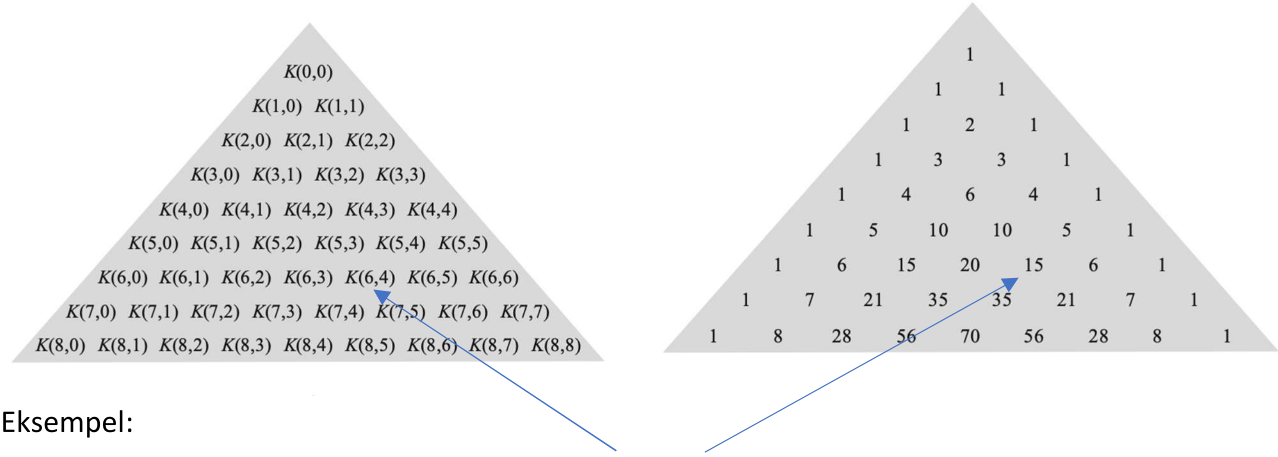
   Hint: du skal vælge 6 dyr ud af hvor mange i alt? Brug teorien om binomialkoefficienten.

b) de 2 ulve *skal* vælges?
   Hint: Lav først et valg af de 2 ulve ud af 2 ulve OG (multiplikationsprincip) derefter et valg af 6 dyr ud af de resterende dyr.

c) de 2 ulve må *ikke* vælges?
   Hint: Fjern de to ulve og brug binomialkoefficienten på de resterende dyr.

PASCALS TREKANT

I stedet for at beregne binomialkoefficienten K(n,r) kan værdien aflæses i Pascals trekant. Pascals trekant findes også på side 28 i formelsamlingen.



Eksempel:

Du aflæser K(6,4) som vist ved den blå pil. Altså K(6,4) =15.

1. række fra oven viser K(0,r)

2. række fra oven viser K(1,r)

3. række fra oven viser K(2,r) osv.

OPGAVE 21

a) Aflæs K(4,2) = _______. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.

b) Aflæs K(8,2) = _______. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.

c) Aflæs K(7,6) = _______. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.

d) Aflæs K(3,0) = _______. Sæt ring om tallet nedenfor *uden* at kigge på trekanten til venstre ovenfor.