Matematik i grundforløbet

Eksponentialfunktioner

Eksponentialfunktioner

Eksempel

En kendt børnegåde lyder omtrent som følger: I en sø er der en åkande, som fordobler sin størrelse hvert døgn. Hvis åkanden dækker hele søen efter 30 døgn, hvor mange døgn er der så gået, når åkanden dækker halvdelen af søen?

Kan du svaret på gåden?

Åkandens vækst kan beskrives med en type funktion, der opfører sig på en anden måde end de lineære funktioner, som vi tidligere har arbejdet med. Hvis åkandens begyndelsesareal er 1 cm^2 kan væksten beskrives med denne forskrift:

$$f(x) = 1 \cdot 2^x$$

Vi udregner nogle funktionsværdier

$$f(0) = 1 \cdot 2^0 = 1 \cdot 1 = 1$$

Efter 0 dage er arealet 1 cm^2.

$$f(1) = 1 \cdot 2^1 = 1 \cdot 2 = 2$$

Efter 1 dage er arealet 2 cm^2, altså det dobbelte.

$$f(4) = 1 \cdot 2^4 = 1 \cdot 16 = 16$$

Efter 4 dage er arealet 16 cm^2.

Eksponentialfunktion

En funktion med forskriften

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kaldes en *eksponentialfunktion*. I forskriften er a og b positive konstanter.
b kaldes for *begyndelsesværdien,* og a kaldes for *fremskrivningsfaktoren*.

Grafer for eksponentialfunktioner

Du skal nu undersøge konstanternes betydning for grafens udseende.
Åbn dokumentet *Undersøgelse af a og b.tns* som ligger på modulet.
Dokumentet viser grafen for en eksponentialfunktion. Ved at trække i skyderne kan man ændre værdier af a og b. Nederst kan du se forskriften for den eksponentialfunktion, hvis graf vises.

Begyndelsesværdien *b*

I denne del skal du se på den grafiske betydning af koefficienten b.

Vælg en eksponentialfunktion, som du kan tage udgangspunkt i. a-værdien skal være større end 1.

Skriv forskriften her: ___________________________________

Hold a-værdien fast. Hvad sker der med grafen, når b langsomt gøres større?

____

____

Hvad sker der, når b gøres mindre?

____

____

Beskriv med ord, hvilken indflydelse b har for grafens forløb. Hvor på grafen kan b aflæses (tegn en skitse, der viser det og beskriv det med ord)?

Udfordring: Nu har du faktisk skrevet en formodning om, hvad b betyder. Kan du også bevise den? Brug forskriften for funktionen: $f(x) = b \cdot a^x$.

Fremskrivningsfaktoren a

I denne del skal I se på den grafiske betydning af koefficienten a.

Vælg en eksponentialfunktion, som I kan tage udgangspunkt i. Dens b-værdi skal være mindre end 3, og dens a-værdi skal være lig med 3.

Skriv forskriften her: ______________________________

Hold b-værdien fast. Varier langsomt a fra 3 og ned til 0,1. Hvad sker der med grafen? Ved hvilken værdi af a ændrer grafen væsentligt sit udseende?

____

____

____

____

Tegn grafen for en funktion, hvis a-værdi er større end 1, og tegn grafen for en funktion, hvis a-værdi er mindre end 1. Skriv i begge tilfælde også forskriften for funktionen. Hvad sker der, hvis $a = 1$?

Nu har I faktisk opdelt undersøgelsen af a i tre tilfælde: $a = 1$, $a > 1$ og $0 < a < 1$ (læs disse uligheder højt for hinanden i dagligdags sprog, så I er helt med på, hvad de siger).

Beregning af funktionsværdier

Ligesom for lineære funktioner er forskriften en *opskrift* til at finde y, hvis man kender x. Din matematiklærer har fundet på følgende eksponentialfunktion

$$f(x) = 5 \cdot 2^x$$

a) Hvad er begyndelsesværdien? $b =$ ________ (svaret er et tal)

b) Hvad er fremskrivningsfaktoren? $a =$ ________ (svaret er et tal)

Vi vil nu udregne funktionsværdier. For at udregne $f(3)$ indsætter vi $x = 3$ på x'ets plads i forskriften og regner

$$f(3) = 5 \cdot 2^3 = 5 \cdot 8 = 40$$

Det er vigtigt, at potensen 2^3 udregnes, før vi ganger med 5.

Udregn følgende funktionsværdier

$f(1) =$ ______________________________ (svaret er 10)

$f(2) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

$f(4) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

Og to lidt sværere udregninger

$f(0) =$ ______________________________ (vink: $2^0 = 1$)

$f(-1) =$ ______________________________ (vink: $2^{-1} = 0{,}5$)

Din matematiklærer har fundet på en ny eksponentialfunktion

$$g(x) = 4 \cdot 3^x$$

Udregn følgende funktionsværdier

$g(0) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

$g(1) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

$g(2) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

$g(3) =$ ______________________________ (svaret er et helt tal)

Fortolkning af a og b

Eksempel

Familien Jensens årlige elforbrug kan i en årrække beskrives med følgende model:

$$f(x) = 4300 \cdot 1{,}013^x$$

hvor $f(x)$ er familien Jensens årlige elforbrug i kWh, og x er antal år efter 2020.

Vi vil gerne finde ud af, hvad tallene 4300 og 1,013 fortæller om familiens årlige elforbrug.

I 2020 er $x = 0$. Hvis vi udregner $f(0)$ er det familiens elforbrug i 2020.

$$f(0) = 4300 \cdot 1{,}013^0 = 4300 \cdot 1 = 4300$$

Dvs. 4300 fortæller, at familien Jensens årlige elforbrug var 4300 kWh i år 2020.

a-værdien på 1,013 er fremskrivningsfaktoren. Hvert år bliver elforbruget 1,013 gange større. Når man ganger med 1,013 svarer det til at lægge en bestemt procent til. Følgende sætning beskriver det.

Sætning

I en eksponentialfunktion

$$f(x) = b \cdot a^x$$

kan konstanterne fortolkes:

b er funktionsværdien når $x = 0$, altså $f(0) = b$.

a angiver, hvad y bliver ganget med hver gang x vokser med 1. Hvis vi udregner *vækstraten* $r = a - 1$ og omregner til procent $r \cdot 100\%$, så fortæller $r \cdot 100\%$ hvor mange procent y vokser med hver gang x vokser med 1.

Den virkelige verden

I opgaver om den virkelige verden er b y-værdien til at begynde med, f.eks. i startåret.

I opgaver om den virkelige verden så fortæller a, at y vokser med $r \cdot 100\%$ f.eks. hvert år (hvis x er årstal).

Eksempel (fortsat)
Vi vender tilbage til familien Jensens årlige elforbrug, som beskrives ved

$$f(x) = 4300 \cdot 1{,}013^x$$

b-værdien på 4300 er begyndelsesværdien. Den fortæller, altså at familien Jensens årlige elforbrug var 4300 kWh i begyndelsesåret, 2020.

a-værdien på 1,013 er fremskrivningsfaktoren. Fremskrivningsfaktoren kan vi bruge til at beregne hvor mange procent familiens elforbrug vokser pr. år:

$$r = a - 1$$
$$r = 1{,}013 - 1 = 0{,}013$$
$$0{,}013 \cdot 100\% = 1{,}3\%$$

Elforbruget for familien Jensen vokser altså med 1,3% pr. år efter år 2020.

Opgaver

Opgave 1

Fortolk konstanterne i de lineære og eksponentielle sammenhænge:

a) Indiens befolkning kan beskrives med modellen

$$f(x) = 496{,}88 \cdot 1{,}002^x$$

hvor x er antal år efter 1965, og $f(x)$ er Indiens befolkning til tiden x målt i mio.

b-værdien på ________________ er ____________________. Den fortæller,

at ______________________________________var ______________ i

begyndelsesåret ____________.

a-værdien på ________________ er ____________________. Den kan

bruges til at beregne__________________ $r =$__________________.

Indiens befolkning vokser med ___________% pr år i årene efter __________.

b) Kinas bruttonationalprodukt (BNP) pr. indbygger kan beskrives med modellen

$$f(x) = 129{,}06 \cdot 1{,}076^x$$

Hvor x er antal år efter 1975, og $f(x)$ er Kinas BNP pr. indbygger målt i US dollars.

b-værdien på ________________________ er ______________________________. Den fortæller,

at ____var _____________________ i

begyndelsesåret _____________________.

a-værdien på ________________________ er ______________________________. Den kan

bruges til at beregne_____________________________ $r =$______________________________.

Kinas BNP pr. indbygger vokser med ____________% pr år i årene efter ________________.

c) Antal elever på danske efterskoler kan beskrives modellen

$$f(x) = 532{,}1x + 5817{,}9$$

hvor x er antal år efter 1970, og $f(x)$ er antal elever til tiden x.

b-værdien på ________________________ er ______________________________. Den fortæller,

at ____var _____________________ i

begyndelsesåret _____________________.

a-værdien på ________________________ er ____.

Den fortæller, at ____ vokser med _____________

pr. år efter begyndelsesåret __________________

d) Antal tankstationer i Danmark kan beskrives med modellen

$$f(x) = 5180{,}3 \cdot 0{,}966^x$$

hvor x er antal år efter 1975, og $f(x)$ er antal tankstationer til tiden x.

Nu skal du selv formulere sætningerne:

b-værdien ____

____

____

____

a-værdien____

____

____

____

____

e) Det daglige indtag af kød i Kims husstand kan beskrives med modellen

$$f(x) = 375 \cdot 1{,}031^x$$

Hvor $f(x)$ angiver det daglige indtag af kød i husstanden målt i gram og x er antal år efter 2012.

b-værdien ____

____

____

____

a-værdien____

____

____

____

f) Det samlede areal af marker i et land følger modellen

$$f(x) = 3{,}5 \cdot 0{,}982^x$$

Hvor $f(x)$ angiver det samlede areal af markerne angivet i mio. hektar, x antal år efter 2000

b-værdien ______________________________

____

____

____

a-værdien ______________________________

____

____

____

g) Prisen for kørsel i taxa kan beskrives med modellen

$$f(x) = 75 + 10 \cdot x$$

hvor x er antal kørte km, og $f(x)$ er prisen i kr. for x antal km.

b-værdien ______________________________

____

____

____

a-værdien ______________________________

____

____

____

Opstilling af eksponentiel model

Eksempel

Vi skal også kunne opstille en eksponentiel model ud fra en tekst.
Familien Jensen synes, at deres årlige elforbrug er for højt. I 2020 var det 4300 kWh, og de beslutter, at de vil forsøge at reducere deres forbrug med 2% om året.

Vi vil nu **indføre passende variable** og opstille en model, der beskriver familien elforbrug.
Først indfører vi passende variable. Det betyder, at vi skal forklare hvad x og $f(x)$ er:

x er år efter 2020
$f(x)$ er familiens årlige energiforbrug efter 2020 i kWh.

Først nu kan vi opstille en model:
b er begyndelsesværdien, altså det årlige elforbrug i 2020: $b = 4300$
a er fremskrivningsfaktoren og kan beregnes ved hjælp af vækstraten $a = 1 + r$
Vi finder $r = \frac{-2\%}{100\%} = -0{,}02$
Vi finder $a = 1 - 0{,}02 = 0{,}98$
Modellen er da

$$f(x) = 4300 \cdot 0{,}98^x$$

Opgave 1

Antallet af indbyggere i et land er i 2012 5 mio. indbyggere. Det forventes at indbyggertallet årligt stiger med 0,8%

a) Indfør passende variable (det betyder, at du skal forklare, hvad x og $f(x)$ er) og opstil en model, der kan beskrive udviklingen af indbyggertallet i landet efter år 2012.

____

____

____

____

____

Opgave 2

Onlinesalget af sandaler fra en bestemt butik er siden 2020 faldet med 2% om året. I 2020 var salget på 16 mio. kr.

a) Indfør passende variable (det betyder, at du skal forklare, hvad x og $f(x)$ er) og opstil en model, der kan beskrive onlinesalget af sandaler siden 2020.

____

____

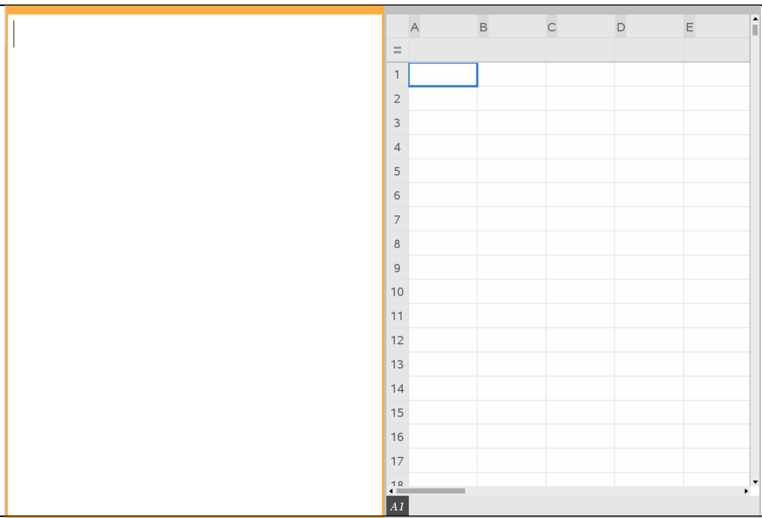
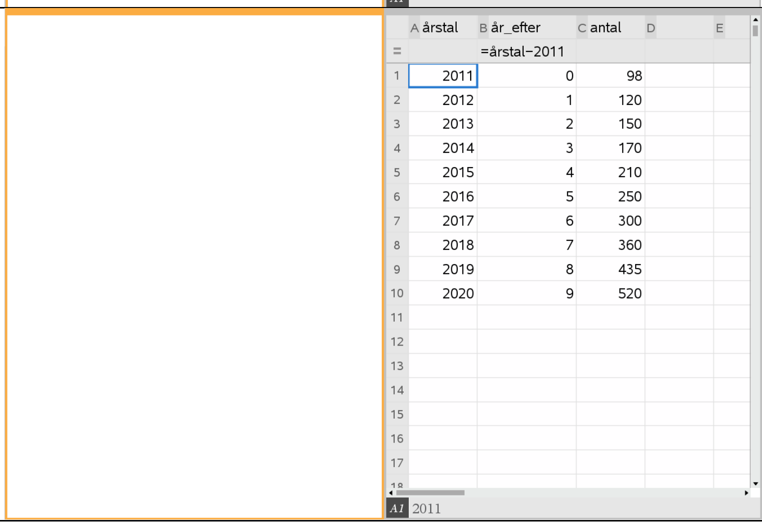
____

____

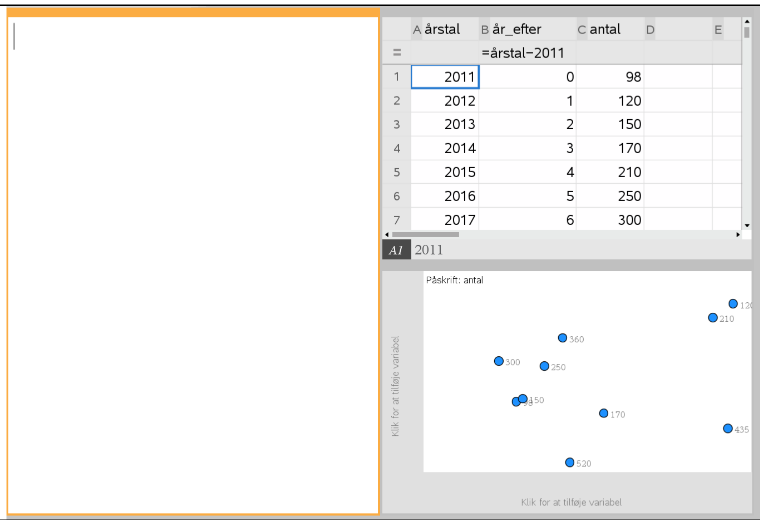
Regression i TI-Nspire

Når vi skal oversætte fra en tabel med data til en forskrift, skal vi bruge regression. Hvis vi ved, at vi skal bruge en eksponentialfunktion, så skal vi lave eksponentiel regression.

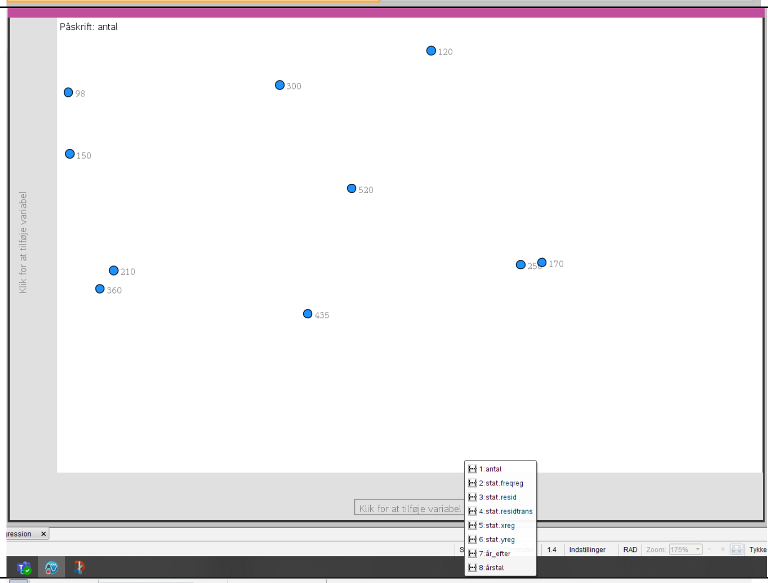
Metoden minder *meget* om lineær regression, vi skal bare vælge en anden type regression i TI-Nspire.

1. Start med at inddele vinduet med et med **Noter** og et felt med **Lister og regneark**	
2. Skriv dine data ind, overskrifter/enheder skal stå øverst i cellerne med bogstaverne. Husk du skal bruge punktum som decimalkomma. Hvis den ene variabel angives som antal år efter... kan du indtaste årstal i en kolonne og de omregnede tal i næste kolonne.	

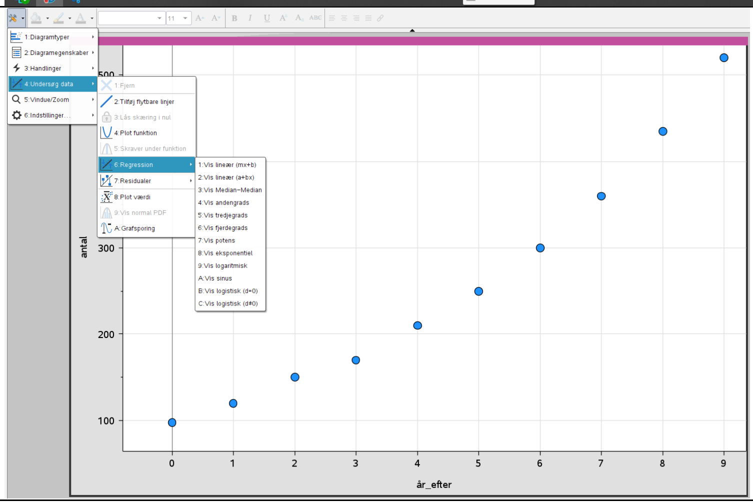
3. Vælg nu sidelayout og indsæt plads til endnu en applikation. Vælg **Diagrammer og statistik**

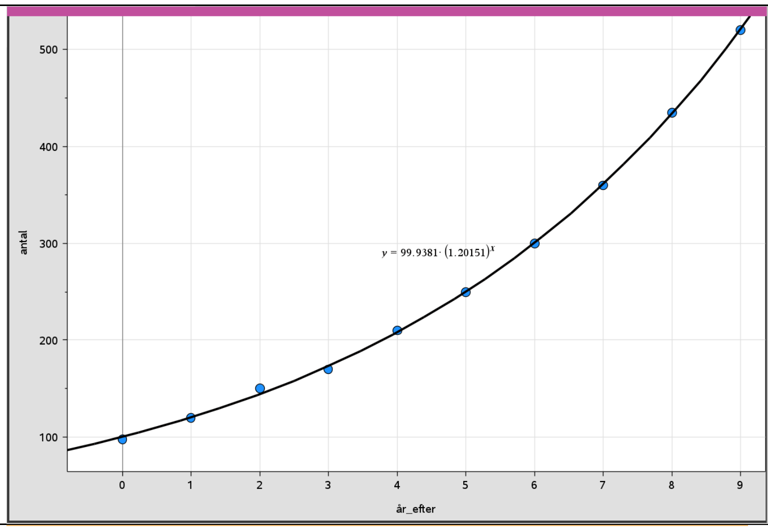


4. Klik på *Klik for at tilføje variabel* for neden og til venstre og vælg x-variablen på x-aksen (her år_efter) og y-variablen på y-aksen (her antal).



5. Vælg nu: Undersøg data og regression. Vælg **eksponentiel** regression. Du har nu den "bedste model" for datasættet.



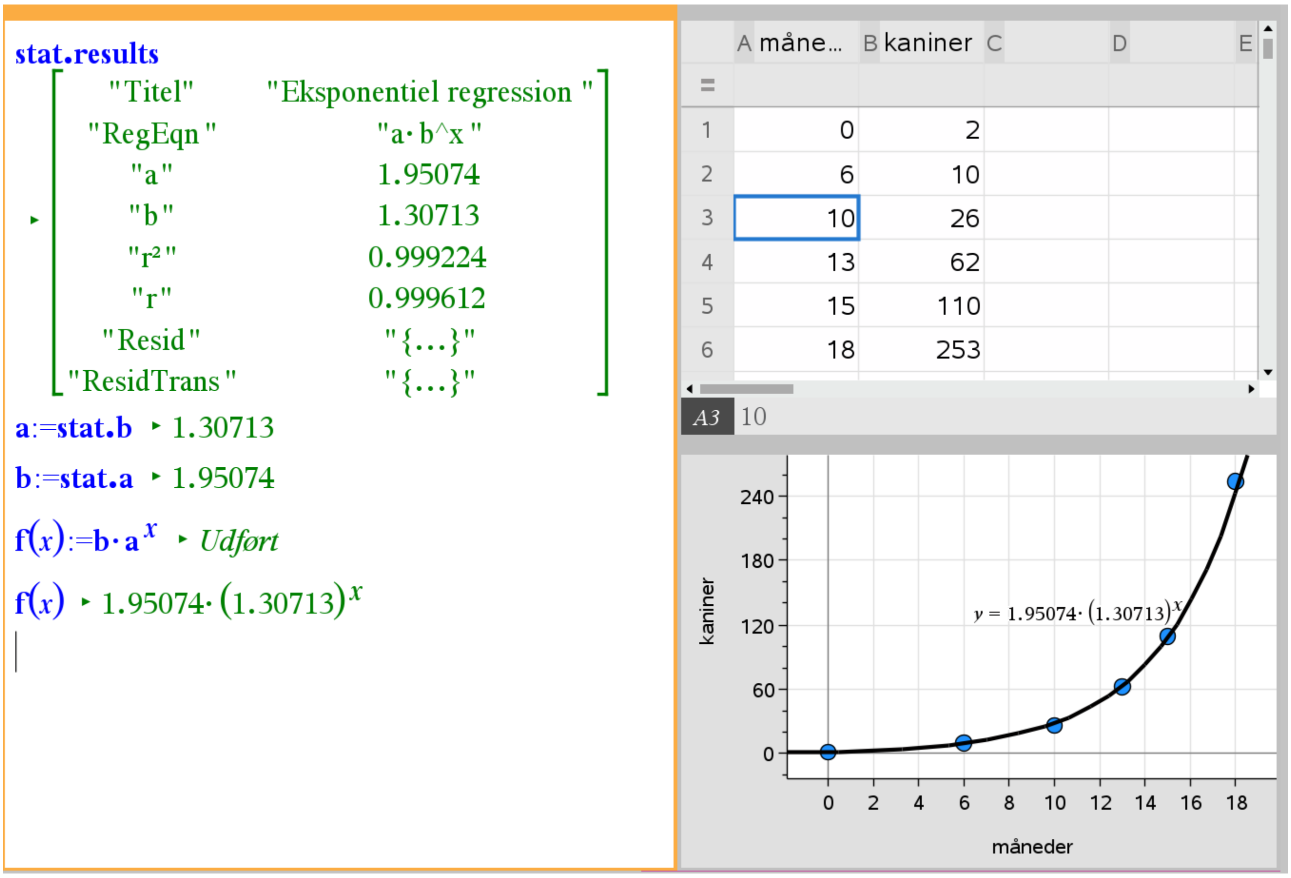
	
Regressionsresultater: Når regressionen er lavet kan regressionsresultaterne hentes ved at skrive "stat.results" i et matematikfelt.	**stat.results** $\blacktriangleright \begin{bmatrix} \text{"Titel"} & \text{"Eksponentiel regression"} \\ \text{"RegEqn"} & \text{"a· b^x"} \\ \text{"a"} & 99.9381 \\ \text{"b"} & 1.20151 \\ \text{"r²"} & 0.999145 \\ \text{"r"} & 0.999573 \\ \text{"Resid"} & \text{"\{...\}"} \\ \text{"ResidTrans"} & \text{"\{...\}"} \end{bmatrix}$
Definere regressionskonstanter a og b **Læg mærke til, at *a* og *b* er byttet om i TI-Nspire.**	**a:=stat.b** ▸ 1.20151 **b:=stat.a** ▸ 99.9381
Definere funktion efter regression **Læg mærke til, at *a* og *b* er byttet om i TI-Nspire.**	$f(x):=b\cdot a^{x}$ ▸ *Udført* $f(x)$ ▸ $99.9381\cdot(1.20151)^{x}$

Eksempel

Nedenfor ses en tabel over udviklingen i antallet af kaniner på en lille ø:

Måneder	0	6	10	13	15	18
Antal kaniner	2	10	26	62	110	253

Vi vil nu benytte tabellens data til at opstille en eksponentiel model for udviklingen af antal kaniner på øen. Til dette bruger vi TI-Nspire, som beskrevet ovenfor:
Da der ikke er årstal, der skal omregnes til x-værdier er der kun to søjler i regnearket.



Modellen er altså:

$$f(x) = 1{,}95 \cdot 1{,}307^x$$

og vi kan nu arbejde videre med denne forskrift.

Vi kan beregne den procentvise vækst pr måned ved hjælp af fremskrivningsfaktoren:

$\mathbf{r} := \mathbf{a} - 1 \quad ▸ \quad 0.307128$

$\mathbf{r} \cdot 100 \quad ▸ \quad 30.7128$

Det betyder, at antallet af kaniner stiger med 30,7% pr måned.

Vi kan beregne antallet af kaniner efter fx 20 måneder ($x = 20$)

$\mathbf{f}(20) \quad ▸ \quad 413.579$

Antallet af kaniner efter 20 måneder er 413.

Vi kan benytte modellen til at bestemme hvor mange måneder, der går, før der er 550 kaniner på øen. Her skal vi løse ligningen $f(x) = 550$ med hensyn til x ved hjælp af TI-Nspire:

$\text{solve}(\mathbf{f}(x)=550,x) \quad ▸ \quad x=21.0644$

Der går 21 måneder, før der er 550 kaniner på øen.

Opgaver (løses i TI-Nspire)

Opgave 1
Befolkningstallet på jorden i årrækken fra 1960-1990 følger udviklingen nedenfor

År	1960	1965	1970	1975	1980	1985	1990
Befolkning i milliarder	3,03	3,33	3,69	4,07	4,44	4,85	5,29

Vi antager, at befolkningen vokser eksponentielt i perioden.

a) Indfør passende variable, husk, dvs. du skal forklare, hvad x og $f(x)$ er.

b) Benyt tabellens data til at opstille en model for befolkningstallet på jorden i perioden 1960-1990. Dvs. du skal lave eksponentiel regression på tallene i tabellen.

c) Hvor mange procent vokser befolkningen om året ifølge modellen?

Opgave 2

Tabellen viser verdens samlede årlige produktion af råolie i begyndelsen af 1900-tallet. Produktionen steg med god tilnærmelse eksponentielt.

Årstal	1910	1915	1920	1925	1930
Råolie (mio tønder)	328	432	689	1069	1412

a) Benyt eksponentiel regression til at opstille en model, der beskriver hvordan produktionen afhænger af årstallet efter år 1910.

b) Bestem den årlige procentvise vækst.

c) Bestem hvor mange tønder, der produceres i år 1932 ifølge modellen.

d) Bestem hvilket år produktionen vil overstige 2000 mio. tønder ifølge modellen.

Opgave 3

En plantes højde er blevet målt hver dag i 10 dage:

Dag	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Højde i cm	8	10	11,5	14	15,7	18,3	22,5	29,8	39	45

Det antages, at sammenhængen mellem plantens højde, $f(x)$, i cm og antal dage, x, kan modelleres med følgende model

$$f(x) = b \cdot a^x$$

a) Benyt tabellens data til at bestemme forskriften for $f(x)$.

b) Bestem plantens højde efter 12 dage.

Egne noter