# Annuitetsopsparing

Der findes mange måder at spare op på. Vi vil her se på den såkaldte annuitetsopsparing. Emnet kan bruges som en del af det supplerende stof, og det kan anvendes som oplæg til projekt- eller emneforløb.

## *Indhold*



## *Kendetegn*

En annuitetsopsparing er kendetegnet ved at man hver termin (f.eks. hver måned) indbetaler et fast beløb. Hver termin tilskrives rente, og renten er konstant.

Det viser sig at man kan opstille en formel der knytter den samlede opsparing, den faste indbetaling, renten og antal indbetalinger sammen. Dette materiale drejer sig om anvendelse af annuitetsformlen. På linket her kan du læse et bevis for formlen.

Vi bruger følgende betegnelser:
A saldoen opgjort netop når den sidste indbetaling foretages
b det faste beløb der indsættes hver termin
r rentefoden pr. termin, dvs. renten skrevet som decimalbrøk (f.eks. 3% = 0,03)
n antallet af indbetalinger

Med disse betegnelser gælder følgende formel for en annuitetsopsparing:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

I formlen kan man med b,r og n beregne A. Hvis man istedet isolerer b i formlen fås:

$$b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

Man skal huske at A er størrelsen på opsparingen (saldoen) opgjort lige når den sidste indbetaling er foretaget. Sidste indbetaling når altså ikke at tilskrives renter.

Vi vil nedenfor se på hvordan formlen for annuitetsopsparingen virker i forskellige opgavetyper. Men inden da illustrerer vi med et eksempel hvordan opsparingen udvikler sig termin for termin.

## *Udviklingen termin for termin*

Vi kan forestille os at vi hvert år indsætter 1000 kr på en konto hvor renten er 7% p.a. (pr. år). År for år vil opsparingen udvikle sig som følger:

| **Indbetaling** | **Saldo i kr.** |
|---|---|
| 1 | 1000 |
| 2 | 2070 |
| 3 | 3215 |
| 4 | 4440 |
| 5 | 5751 |
| 6 | 7153 |
| 7 | 8654 |
| 8 | 10260 |
| 9 | 11978 |
| 10 | 13816 |
| 11 | 15784 |
| 12 | 17888 |

I tabellen ser vi at saldoen f.eks. efter den 2. indbetaling er 2070. Hvis vi lader $A_n$ betegne saldoen umiddelbart efter den n´te indbetaling, kan vi forklare tabellen på følgende måde:

**Efter 1. indbetaling:**
Pr. definition er $A_1 = 1000$, da saldoen jo opgøres umiddelbart efter 1. indbetaling på 1000 kr.
**Efter 2. indbetaling:**
Når der er gået en termin har $A_1$ fået tilskrevet renter og 2. betaling foretages. Man lægger 7% til et beløb ved at gange det med 1,07:
$$A_2 = A_1 \cdot 1{,}07 + 1000 = 1000 \cdot 1{,}07 + 1000 = 2070$$
**Efter 3. indbetaling:**
Når der er gået et år mere har $A_2$ fået tilskrevet renter og 3. betaling foretages.
$$A_3 = A_2 \cdot 1{,}07 + 1000 = 2070 \cdot 1{,}07 + 1000 = 3215$$

Sådan kan man fortsætte med at beregne saldoen på kontoen efter hver termin.

## ***Brug af formlen*** $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$

I eksemplet ovenfor fandt vi frem til at saldoen efter 3. indbetaling var 3215. Saldoen kunne også beregnes vha. formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

Vi har b = 1000, r = 7% og n = 3:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n}{r} = 1000 \cdot \frac{(1+0{,}07)^3 - 1}{0{,}07} = 3215$$

Hvis man er interesseret i saldoens udvikling termin for termin kan man vha. et regneark lave en tabel som ovenfor. Hvis man derimod blot er interesseret i saldoen efter et bestemt antal indbetalingen er formlen for annuitetsopsparingen

$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ bekvem.

I formlen indgår 4 størrelser. Vi gennemgår nedenfor de fire situationer hvor vi kender tre af størrelserne og skal beregne den fjerde vha. formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$.

### Eksempel 1: A ukendt

Vi indsætter hver måned 910 kr og vi får en månedlig rente på 2%. Hvor mange penge har vi efter den 17. indbetaling?
Vi indsætter de kendte størrelser i formlen:

$$A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 910 \cdot \frac{(1+0{,}02)^{17} - 1}{0{,}02} = 18211$$

Vi har indsat 910 kr. 17 gange, så alt i alt har vi indsat: $17 \cdot 910 = 15470$
Da vi ender med en saldo på 18211 kr., har vi fået $18211 - 15470 = 2741$ kr i rente.

### Eksempel 2: b ukendt

Vi ønsker at spare 1.000.000 kr op ved indbetaling af et fast beløb pr. måned. Vi får 1% i månedlig rente. Vi agter at gøre det i 7 år, altså foretage 84 indbetalinger. Hvor meget skal vi da indbetale pr. måned?

Man kan omforme $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ til $b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$. Med A = 1.000.000, r = 1% og n = 84 fås:

$$b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1} = 1000000 \cdot \frac{0{,}01}{(1+0{,}01)^{84} - 1} = 7652{,}73$$

Med en månedlig indbetaling på 7653 kr (afrundet) vil vi i alt nå at indbetale $84 \cdot 7652{,}73 = 642.829$ . Da har vi fået tilskrevet renter på i alt: $1000000 - 642829 = 357.171$ kr.

## Eksempel 3: r ukendt

Hvad er den årlige rente på en annuitetsopsparing hvis vi hvert år indsætter 3000 kr., og vi umiddelbart efter den 20. indbetaling har 83.000 kr?

Det viser sig at man ikke kan isolere størrelsen r i formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ . Man er nødt til at prøve sig frem med forskellige renter:

I formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ udregnes højresiden ved forskellige årlige renter:

| **Årlig rente** | **Saldo i kr.** |
|---|---|
| 2,00% | 72.892 |
| 2,25% | 74.735 |
| 2,50% | 76.634 |
| 2,75% | 78.592 |
| 3,00% | 80.611 |
| 3,25% | 82.693 |
| 3,50% | 84.839 |
| 3,75% | 87.052 |
| 4,00% | 89.334 |

Vi ønsker at få en saldo på 83.000 kr., og vi kan se at den årlige rente må ligge mellem 3,25% og 3,5%

Vi udregner eksempelvis for r = 3,25%:

$$A = 3000 \cdot \frac{(1+0{,}0325)^{20} - 1}{0{,}0325} = 82.693$$

Vi kan dernæst forsøge med 3,26%, 3,27% osv.
Ved på denne måde at efterprøve får man præcist r = 3,286%.

## Eksempel 4: n ukendt

En familie ønsker at spare 2.000.000 kr. op. De kan betale 15.000 kr. pr. måned, og banken tilbyder en fast månedlig rente på 0,7%. Hvor mange måneder vil de være om at nå det ønskede mål?

Der er to metoder til at finde resultatet:

- Man kan prøve sig frem som i eksempel 3 hvor renten er ukendt. Man prøver sig frem med forskellige værdier af n for at ramme en saldo på 2 mio. kr.
- Man kan isolere n i annuitetsopsparingsformlen. For at forstå det skal man have læst om logaritmer s. 60 og om ”eksponentielle ligninger” s. 152 i bogen.

Hvis man af annuitetsformlen udregner n, får man:

$$n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1 + r)}$$

Med A = 2.000.000 kr., b = 15.000 kr. og r = 0,7%:

$$n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1 + r)} = \frac{\log(\frac{2000000 \cdot 0{,}007}{15000} + 1)}{\log(1 + 0{,}007)} = 95 \text{ (afrundet)}$$

Det tager altså familien ca. 95 måneder eller næsten 8 år. Familien indbetaler i alt: $95 \cdot 15000 = 1425000$. Dermed får den i alt i rente: $2000000 - 1425000 = 575000$ kr.

## *Husk*

Der er flere ting der volder problemer ved annuitetsopsparinger:

- Rentefoden skal passe til terminen. Hvis man indbetaler pr. måned, skal renten være månedlig rente; hvis man indbetaler pr. kvartal, skal rente være kvartalsvis rente osv..
  Omregning f.eks. mellem månedlige og årlige renter kan du læse om i bogen s. 50.
- Når du bruger formlen $A = b \cdot \frac{(1 + r)^n - 1}{r}$, skal du ved indtastning på lommeregneren huske på regnehierarkierne f.eks. ved at sætte parentes om tælleren i brøken. Du kan repetere regnehierarkierne ved at læse i bogen s. 29.

## *Opgaver*

### Opgave 1

Lad A = 1200 kr., r = 2% og n = 8.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme b

Svar: 139,81 kr.

### Opgave 2

Lad A = 3000 kr., b = 300 kr. og n = 8.

- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme r (2 decimaler)

Svar: 6,29%

### Opgave 3
Lad b = 1273 kr., r = 11,11% og n = 7.
- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme A

Svar: 12 496,31 kr.

### Opgave 4
Lad A = 6170 kr., r = 4% og b = 193 kr..
- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme n

Svar: 21

### Opgave 5
Lad A = 56 218 kr., b = 900 kr. og n = 32.
- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme r (2 decimaler)

Svar: 3,98%

### Opgave 6
Lad A = 1 154 520 kr., r = 5,3% og b = 80 000 kr.
- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme n

*Svar: 11*

### Opgave 7
Lad A = 140 000 kr., r = 3,52% og n = 19.
- Benyt annuitetsopsparingsformlen til at bestemme b

Svar: 5301,36 kr.

### Opgave 8
På en annuitetsopsparingskonto er det faste månedlige beløb 1620 kr., og den månedlige rente er 1%.
- Hvad er saldoen efter den 9. indbetaling?

Svar: 15177,01kr.

### Opgave 9
En familie kan hver måned sætte 8000 kr i banken. De tilbydes en konto med en månedlig rente på 0,75%.
- Hvor mange måneder skal familien indsætte penge for at saldoen overstiger 250 000 kr.?

Svar: 29

## Opgave 10

En familie ønsker at spare op til udbetalingen på et hus, der koster 4 000 000 kr. Udbetalingen er på 10% af husprisen. De kan få 0,4% i månedlig rente på en konto i GoldenDreams Banken

- Hvor stor skal den månedlige indbetaling være hvis familien ønsker at have til udbetalingen efter 48 indbetalinger?

Svar: 7575,52 kr

## Opgave 11

Line har hvert kvartal indbetalt 4070 kr på en konto i banken. Efter 26. kvartalsvise indbetalinger er det blevet til 160 000 kr.

- Hvad har den kvartalsvise rente været (2 decimaler)?
- Hvilken årlig rente svarer en sådan (afrundet) kvartalsvis rente til (afrundes til 2 decimaler)?

Svar: 3,14%, 13,16%

## Opgave 12

Betragt en annuitetsopsparing hvor den faste månedlige indbetaling er 8000 kr og den månedlige rente er 1,3%. Bestem saldoen efter 2., 3. og 4. indbetaling og de samlede tilskrevne renter efter 2., 3. og 4. indbetaling.

Svar:

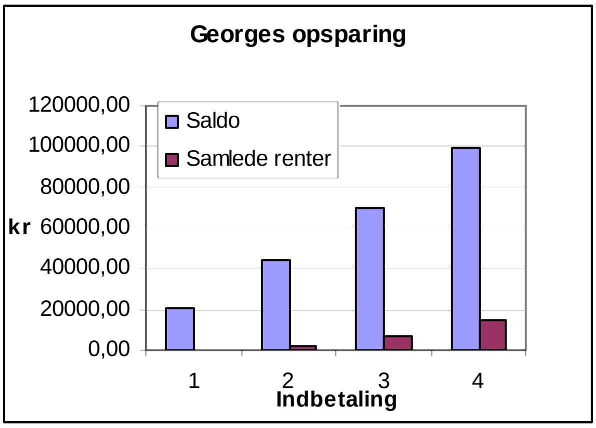
| Indbetaling | Rente | Saldo | Samlede renter |
|---|---|---|---|
| 1 | 0,00 | 8000,00 | 0,00 |
| 2 | 104,00 | 16104,00 | 104,00 |
| 3 | 209,35 | 24313,35 | 313,35 |
| 4 | 316,07 | 32629,43 | 629,43 |

## Opgave 13

På en konto indbetaler George et årligt fast beløb på 21 000 kr. Renten er 11% p.a.

- Hvor mange penge har George umiddelbart efter den 4. indbetaling?
- Lav et stolpediagram der illustrerer saldoen og de samlede tilskrevne renter efter henholdsvis 1., 2., 3. og 4. termin

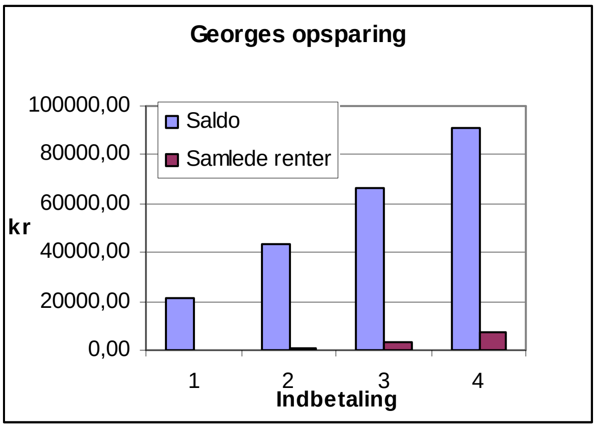
Svar: 98 904,35 kr.




## Opgave 14

Lav samme opgave som ovenfor – blot hvor renten er det halve, altså 5,5% p.a.

Svar: 91 187,59 kr.




## Opgave 15

På en annuitetsopsparingskonto indbetaler en mand 1200 kr. om måneden til en månedlig rente på 2,3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 15. indbetaling?
- Hvor meget har han i alt fået i rente?

Manden holder op med at ryge og kan nu månedligt betale 2400 kr.

- Besvar nu de samme spørgsmål som ovenstående.
- Hvad er der sket?

Svar: 21207,80 kr.; 3207,80 kr.; 42415,60 kr.; 6415,62 kr.. Både saldo og rentebeløbet fordobles.

## Opgave 16
På en annuitetsopsparingskonto i København indbetaler en mand 1835 kr om året til en årlig rente på 7,3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 28. indbetaling?
- Hvor meget har han i alt fået i rente?

Manden bliver kontaktet af Vestjysk Spare- og Spinkekasse, der tilbyder en annuitetsopsparingskonto med en årlig rente der er det dobbelte af renten på kontoen i København

- Besvar nu de samme spørgsmål som ovenstående.
- Betyder en fordobling af renten en fordobling af opsparingen og af den samlede rentetilskrivning?

Svar: 155 624 kr.; 104 244 kr.; 558 190 kr.; 506 810 kr. Nej, en fordobling af renten betyder her mere end en tredobling af opsparingen og næsten en femdobling af rentebeløbet.

## Opgave 17
En kvinde opretter en annuitetsopsparingskonto med en kvartalsvis indbetaling på 16 000 kr. Der tilskrives en kvartalsvis rente på 3%.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 20. indbetaling?
- Hvor meget har hun i alt fået i rente?

Kvinden overvejer at fortsætte indbetalingerne til og med den 40. indbetaling.

- Hvad står der på kontoen umiddelbart efter den 40. indbetaling?
- Betyder en fordobling af antallet af indbetalinger en fordobling af opsparingen og af den samlede rentetilskrivning?

Svar: 429 926 kr., 109 926 kr., 1 206 420 kr.; 566 420 kr. Nej, der sker her ca. en tredobling af opsparingen og ca. en femdobling af den samlede rentetilskrivning.

## Opgave 18
Tanja beslutter at indbetale 3500 kr hver måned på en konto, hvor hun får 0,9% i rente pr. måned.

- Hvor meget vil der står på kontoen umiddelbart efter den 13. indbetaling?

Det viser sig at Tanja får nogle uforudsete udgifter, så hun kun når at foretage 10 indbetalinger. Hun lader dernæst pengene stå i 3 måneder til den aftalte rente.

- Hvor meget står da på kontoen?
- Hvor meget mister Tanja i renteindtægt ved at afholde sig fra at indbetale de sidste 3 gange?

Svar: 48 039,94 kr.; 37445,15 kr.; 94,78 kr.

## Opgave 19

I gennemgangen af annuitetsopsparingen blev det nævnt at formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan omformes til $b = A \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$. Vis hvordan.

## Opgave 20

I gennemgangen af annuitetsopsparingen blev det nævnt at formlen $A = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$ kan omformes til $n = \frac{\log(\frac{A \cdot r}{b} + 1)}{\log(1+r)}$. Læs først i bogen om eksponentielle ligninger s. 152, og vis dernæst hvordan omformningen kan gøres.

## Opgave 21

For en given annuitetsopsparing kan vi kalde saldoen efter den k-te indbetaling for $A_k$ og tilsvarende kan vi kalde saldoen efter den foregående indbetaling for $A_{k-1}$. Opstil en formel der udtrykker $A_k$ ved $A_{k-1}$, r og b.