Forløb om annuitetslån

Dette materiale fokuserer på den type lån der betegnes *annuitetslån*. Emnet kan bruges som en del af det supplerende stof, og materialet kan anvendes til projekt- og emnearbejde.

Materialet består af:

- Om formlen for annuitetslån (GRYN-formlen)
- Eksempel 1: G ukendt
- Eksempel 2: y ukendt
- Eksempel 3: r ukendt
- Eksempel 4: n ukendt
- Opgaver i annuitetslån

Om formlen for annuitetslån (GRYN-formlen)

Det særlige for et annuiteslån er at ***ydelsen er konstant***. Det vil sige at man skal betale samme beløb hver termin (f.eks. hver måned eller hvert kvartal). Tilbagebetalingen begynder én termin efter lånet udbetales. Renten antages at være fast i lånets løbetid. Hver termin tilskrives renter på lånet.

Det viser sig at man kan opstille en formel der knytter ydelsen, lånets størrelse (hovedstolen), renten og løbetiden sammen. I dette materiale vil vi fokusere på hvordan man anvender formlen for annuitetslån, dvs. hvordan man foretager beregninger.

På bogens hjemmeside findes to beviser for formlen.

Vi bruger følgende betegnelser:

G	hovedstolen (det lånte beløb)
r	rentefoden pr. termin, dvs. renten som decimalbrøk (f.eks. 8% = 0,08)
y	ydelsen
n	antallet af terminer

Med disse betegnelser gælder der den såkaldte GRYN-formel for et annuitetslån:

GRYN-formlen:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$$

I formlen kan man med y, r og n beregne G. Hvis man istedet isolerer y i formlen fås:

$$y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

I GRYN-formlen indgår fire størrelser. Vi ser nedenfor på de fire situationer hvor vi kender tre af størrelserne og skal beregne den fjerde vha. GRYN-formlen. Hvis du vil læse om udviklingen på et annuitetslån betragtet termin for termin kan du læse materialet om låntyper.

Eksempel 1: G ukendt

Hvis vi er parate til at betale en ydelse pr. måned på 1500 kr., renten pr. måned er 1,2%,og vi ønsker at afvikle lånet på 72 måneder, kan vi med GRYN-formlen beregne hvor meget vi kan låne:

Vi har y = 1500, r = 0,012, n = 72:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 1500\frac{1-(1+0{,}012)^{-72}}{0{,}012} = 72044$$

Vi bemærker at da den månedlige ydelse er 1500 kr, betaler vi i alt for lånet:

$$72 \cdot 1500 = 108000$$

Da hovedstolen blev beregnet til 72.044 kr., betyder det at vi i alt betaler følgende i rente:

$$108000 - 72044 = 35956$$

Eksempel 2: y ukendt

Vi kan vha. GRYN-formlen beregne den årlige ydelse vi skal betale på et annuitetslån hvor vi låner 51 000 kr, renten er 6,5% p.a. (pr. år) og løbetiden er 15 år.

Man kan omforme GRYN-formlen til følgende formel: $y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$

Vi har G = 51 000, r = 0,065, n = 15: $y = G\frac{r}{1-(1+r)^{-n}} = 51000\frac{0{,}065}{1-(1+0{,}065)^{-15}} = 5424$

Vi noterer at da den årlige ydelse på det 15-årige lån er 5424 kr., betaler vi i alt:

$$15 \cdot 5424 = 81360$$

Da hovedstolen var på 51 000 kr. betyder det at vi i alt betaler følgende i rente:

$$81360 - 51000 = 30360$$

Eksempel 3: r ukendt

Hvad er den årlige rente på et annuitetslån hvor hovedstolen er 100 000 kr., den årlige ydelse er på 11 000 kr, og løbetiden er 10 år? Det viser sig, at man ikke kan isolere størrelsen r i GRYN-formlen. Man er nødt til at prøve sig frem med forskellige renter:

I GRYN-formlen $G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$ udregnes højresiden ved forskellige årlige renter:

Årlig rente	Højreside i GRYN-formel
1,00%	**104 184**
1,25%	**102 801**
1,50%	**101 444**
1,75%	**100 113**
2,00%	**98 808**
2,25%	**97 528**

Vi udregner eksempelvis for r = 1,75%:

$$G = y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r} = 100000\frac{1-(1+0{,}0175)^{-72}}{0{,}0175} = 100113$$

Vi ser at den beregnede hovedstol ligger tæt på 100 000 kr. Der reelle rente må ligge en anelse højere, svarende til en lidt lavere hovedstol. Ved at prøve flere gange får man mere præcist r = 1,7715%.

Eksempel 4: Ukendt n

På hvor mange måneder kan jeg tilbagebetale et annuitetslån på 2,2 mio. kr, hvor den månedlige ydelse er 20 000 kr. og den månedlige rente er 0,6%?
Der er to metoder:

- Man kan prøve sig frem som i eksemplet hvor renten er ukendt
- Man kan isolere n i GRYN-formlen. For at forstå det skal man have læst om logaritmer s. 60 og om ”eksponentielle ligninger” s. 152 i bogen.

Man får:

$$n = -\frac{\log(1-\frac{G\cdot r}{y})}{\log(1+r)}$$

Da fås med G = 2 200 000 kr, y = 20 000 kr og r = 0,6%:

$$n=-\frac{\log(1-\frac{G\cdot r}{y})}{\log(1+r)}=-\frac{\log(1-\frac{2200000\cdot 0{,}006}{20000})}{\log(1+0{,}006)}=180{,}34$$

Svaret er altså lidt over 180 måneder svarende til ca. 15 år.

Husk

Der er flere ting der volder problemer ved annuitetslån:

- Rentefoden skal stemme overens med terminen. Hvis renten er pr. måned, så skal ydelserne betales pr. måned osv. Omregning f.eks. mellem månedlige og årlige renter kan du læse om i bogen s. 50.

- Når du bruger GRYN-formlen $G=y\frac{1-(1+r)^{-n}}{r}$, skal du ved indtastning på lommeregneren huske på regnehierarkierne f.eks. ved at sætte parentes om tælleren i brøken. Du kan repetere regnehierarkierne ved at læse i bogen s. 29.

Opgaver

Nedenfor følger opgaver til materialet om annuitetslån.
Du kan også læse materialet om ”låntyper”, hvor annuitetslån behandles – og regne de tilhørende opgaver: link
Du kan også løse gamle eksamensopgaver indenfor annuitetslån: link.
Bemærk at der til den skriftlige eksamen ikke længere stilles denne type opgave.

Opgave 1

Lad G = 150 000 kr., r = 2,5% og n = 14.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme y

Svar: 12 830,48 kr.

Opgave 2

Lad G = 12 000 kr., y = 1000 kr. og n = 15.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme r

Svar: 2,93%

Opgave 3

Lad y = 12 000 kr., r = 4,5% og n = 28.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme G

Svar: 188 914,48 kr.

Opgave 4

Lad G = 12 000, y = 393,34 og r = 1,75%.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme n

Svar: 44

Opgave 5

Lad G = 66 000 kr., y = 700 kr. og n = 100.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme r

Svar: 0,12%

Opgave 6

Lad G = 12 345 kr., y = 719,74 kr. og r = 4,44%.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme n

Svar: 33

Opgave 7

Lad G = 50 000 kr., r = 2,55% og n = 26.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme y

Svar: 2 654,06 kr.

Opgave 8

Lad y = 300 000 kr., r = 11% og n = 11.

- Benyt GRYN-formlen til at bestemme G

Svar: 1 861 954,60 kr.

Opgave 9

Cykelsmeden "Krank og Fælg" tilbyder et annuitetslån til en uundværlig mountainbike til kun 17 000 kr. Der er månedlige terminer og den månedlige rente er 2%. Løbetiden er 8 år.

- Bestem den månedlige ydelse
- Hvor meget kommer man i alt til at betale i rente på lånet?

Svar: 399,72 kr.; 21 373,42 kr.

Opgave 10

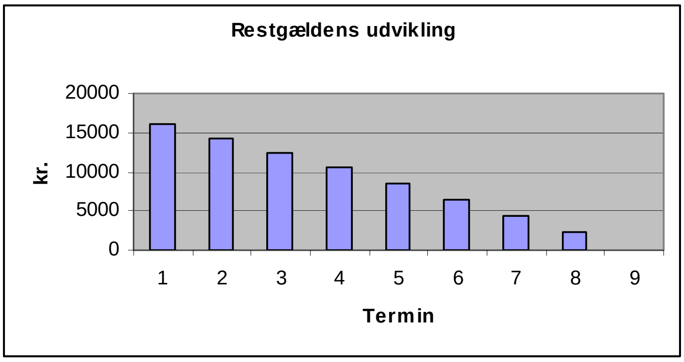
For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om "låntyper".

På et annuitetslån betales hvert kvartal 2279,58 kr., den kvartårlige rente er 2,7% og lånet betales tilbage på 9 kvartaler

- Bestem G

- Lav et søjlediagram der termin for termin illustrerer restgælden

Svar: 18 000 kr.



Opgave 11

For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om ”låntyper”.

Frank Nielsen tilbydes et annuitetslån på 45 000 kr med årlige terminer og en årlig rente på 5,6%. Han skal betale lånet tilbage på 7 år

- Bestem den årlige ydelse
- Opstil en tabel hvor man for hvert år kan aflæse rentebetaling, afdrag og restgæld

Svar: 7 946,84 kr.

Termin	Rente	Afdrag	Restgæld
1	2520	5427	39573
2	2216	5731	33842
3	1895	6052	27791
4	1556	6391	21400
5	1198	6748	14652
6	820	7126	7525
7	421	7525	0

Opgave 12

For at løse denne opgave skal du have læst afsnittet om annuitetslån i materialet om ”låntyper”.

Betragt et annuitetslån hvor hovedstolen er 50 000 kr, den månedlige ydelse er 2350,50 kr og den månedlige rente er 2,2%. Bestem restgæld, rentebetaling og afdrag efter henholdsvis 1., 2. og 3. ydelse.

Svar:

Termin	**Rente**	**Afdrag**	**Restgæld**
1	1100	1251	48749
2	1072	1278	47471
3	1044	1306	46165

Opgave 13

I gennemgangen af annuitetslån blev det nævnt at GRYN-formlen kan omformes til

$y = G\dfrac{r}{1-(1+r)^{-n}}$. Vis hvordan.

Opgave 14

I gennemgangen af annuitetslån blev det nævnt at GRYN-formlen kan omformes til

$$n = -\frac{\log(1-\frac{G \cdot r}{y})}{\log(1+r)}.$$

Læs først i bogen om eksponentielle ligninger s. 152, og vis dernæst hvordan omformningen kan gøres.

Opgave 15

For et givet annuitetslån kan vi kalde restgælden efter den k-te termin for G_k og tilsvarende kan vi kalde restgælden til den foregående termin for G_{k-1} . Opstil en formel der udtrykker G_k ved G_{k-1}, r og y.

Svar: $G_k = G_{k-1} - (y - G_{k-1} \cdot r) = G_{k-1}(1+r) - y$