Regning med potenser

Fra "Lærebog i matematik A1 stx", Systime.

Det er velkendt, at $3^2 = 3 \cdot 3$, og at $4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4$. Tallene 3^2 og 4^3 er eksempler på *potenser*.

Definition 1.5.1 (Naturlige potenser)

For et tal a og et naturligt tal n definerer vi

$$a^n = \overbrace{a \cdot a \cdot \ldots \cdot a}^{n \text{ faktorer}}$$

Tallet a kalder vi for *grundtallet* og n for *eksponenten*.

Indholdet i definitionen er, at a^n er a ganget med sig selv n gange.

Definition 1.5.2 (n'te rod)

Lad a være et ikke-negativt tal og lad n være et naturligt tal. Ved $\sqrt[n]{a}$ forstår vi det *ikke-negative* tal, der ganget med sig selv n gange giver a, dvs.

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

Eksempel 1.5.1

$$\sqrt[3]{125} = 5 \qquad \text{fordi} \qquad 5^3 = 125$$

$$\sqrt[6]{64} = 2 \qquad \text{fordi} \qquad 2^6 = 64$$

$$\sqrt[n]{0} = 0 \qquad \text{fordi} \qquad 0^n = 0$$

Vi kalder $\sqrt[2]{\ }$ for kvadratroden og skriver denne $\sqrt{\ }$.

Tredjeroden $\sqrt[3]{\ }$ kalder vi kubikroden.

Vi skal nu se på nogle regler for regning med potenser. Først ser vi på nogle eksempler.

Eksempel 1.5.2

$$3^2 \cdot 3^4 = \underbrace{(3 \cdot 3)}_{\text{2 faktorer}} \cdot \underbrace{(3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3)}_{\text{4 faktorer}} = \underbrace{3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3}_{\text{ialt 2+4 faktorer}} = 3^6$$

Udregningen viser, at hvis vi ganger to potenser med samme grundtal, kan vi lægge eksponenterne sammen, altså

$$3^2 \cdot 3^4 = 3^{2+4} = 3^6$$

Eksempel 1.5.3

Dividerer vi to potenser med samme grundtal, kan vi forkorte

$$\frac{4^5}{4^3} = \frac{\overbrace{4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4}^{5\text{ faktorer}}}{\underbrace{4 \cdot 4 \cdot 4}_{3\text{ faktorer}}} = \overbrace{4 \cdot 4}^{5-3\text{ faktorer}} = 4^2$$

Her ser vi, at vi kan dividere to potenser med samme grundtal ved at trække eksponenterne fra hinanden

$$\frac{4^5}{4^3} = 4^{5-3} = 4^2$$

Eksempel 1.5.4

$$(5^2)^3 = \overbrace{\underbrace{(5 \cdot 5)}_{2\text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2\text{ faktorer}} \cdot \underbrace{(5 \cdot 5)}_{2\text{ faktorer}}}^{3\text{ parenteser}} = \overbrace{5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5}^{2\cdot 3\text{ faktorer}} = 5^6$$

Vi kan opløfte en potens i en ny eksponent ved at gange de to eksponenter sammen

$$(5^2)^3 = 5^{2\cdot 3} = 5^6$$

Eksempel 1.5.5

$$2^3 \cdot 5^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) \cdot (2 \cdot 5) = (2 \cdot 5)^3 = 10^3$$

Vi kan gange to potenser med samme eksponent ved at gange grundtallene sammen og opløfte produktet i den fælles eksponent.

Altså

$$2^3 \cdot 5^3 = 10^3$$

Eksempel 1.5.6

$$\frac{5^3}{4^3} = \frac{5 \cdot 5 \cdot 5}{4 \cdot 4 \cdot 4} = \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Vi kan dividere to potenser med samme eksponent ved at dividere grundtallene med hinanden og opløfte kvotienten i den fælles eksponent. Altså

$$\frac{5^3}{4^3} = \left(\frac{5}{4}\right)^3$$

Eksemplerne illustrerer de regneregler, vi kalder *potensregnereglerne*. Reglerne er samlet i følgende sætning.

Sætning 1.5.1 (Potensregnereglerne)

For vilkårlige tal a og b og naturlige tal n og m gælder

1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$, når $n > m$ og $a \neq 0$
3. $(a^n)^m = a^{nm}$
4. $a^n \cdot b^n = (a \cdot b)^n$
5. $\dfrac{a^n}{b^n} = \left(\dfrac{a}{b}\right)^n$, når $b \neq 0$