Regning med potenser - det udvidede potensbegreb

Fra "Lærebog i matematik A1 stx", Systime.

De eksponenter, vi har brugt indtil videre, har kun været positive hele tal. Vi ønsker nu at udvide potensbegrebet, således at eksponenten også kan være 0, et negativt helt tal eller en brøk. Vi vil således definere

$$a^0,\ a^{-n},\ a^{\frac{1}{n}} \quad \text{og} \quad a^{\frac{p}{q}}$$

på en måde, som samtidig sikrer os, at potensregnereglerne gælder.

Lad os tage et tal a, som ikke er nul. Så er a^n heller ikke nul og

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Hvis vi nu benytter regel ii) fra Sætning 1.5.1, bliver

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

Altså gælder potensregnereglerne kun, hvis vi sætter $a^0 = 1$.

Definition 1.5.3 (Eksponenten 0)

For et vilkårligt tal a forskelligt fra nul sætter vi

$$a^0 = 1$$

Vi vil nu finde ud af, hvad vi skal sætte a^{-n} til, for at potensregnereglerne også gælder for disse tal.

Når regel i) fra Sætning 1.5.1 skal gælde, finder vi, at

$$a^n \cdot a^{-n} = a^{n+(-n)} = a^{n-n} = a^0 = 1$$

Altså skal $a^n \cdot a^{-n} = 1$. Division med a^n i dette udtryk giver nu

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Definition 1.5.4 (Negativ hel eksponent)

For et vilkårligt tal a , $a \neq 0$, og et naturligt tal n sætter vi

$$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$$

Eksempel 1.5.7

Af definitionerne får vi, at

$$3^0 = 1 \qquad (-2)^0 = 1 \qquad 0{,}7842^0 = 1$$

$$3^{-2} = \frac{1}{3^2} = \frac{1}{9} \qquad 7^{-3} = \frac{1}{7^3} = \frac{1}{343} \qquad 5^{-1} = \frac{1}{5}$$

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2$$

Vi ser nu på eksponenter, som er stambrøker. En stambrøk er en brøk, hvor tælleren er 1 og nævneren et naturligt tal, dvs. et tal på formen $\frac{1}{n}$, hvor $n \in \mathbb{N}$.

Ifølge regel iii) i Sætning 1.5.1 finder vi, at

$$(a^{\frac{1}{n}})^n = a^{\frac{1}{n} \cdot n} = a^{\frac{n}{n}} = a^1 = a$$

Men samtidig ved vi, at

$$(\sqrt[n]{a})^n = a$$

når a er positiv, og derfor må vi lave følgende definition.

Definition 1.5.5 (Stambrøkseksponent)

For et vilkårligt positivt tal a og et naturligt tal n sætter vi

$$a^{\frac{1}{n}} = \sqrt[n]{a}$$

Eksempel 1.5.8

Af ovenstående definition fremkommer følgende

$$8^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{8} = 2 \qquad 5^{\frac{1}{7}} = \sqrt[7]{5} \qquad 16^{\frac{1}{2}} = \sqrt{16} = 4$$

Hvis endelig a er et positivt tal, og $\frac{p}{q}$ er en brøk, hvor p er et helt tal, og q er et naturligt tal, finder vi ved brug af regel iii) fra Sætning 1.5.1 og Definition 1.5.5, at

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q} \cdot p} = (a^{\frac{1}{q}})^p = (\sqrt[q]{a})^p$$

Den sidste definition skal derfor være

Definition 1.5.6 (Rational eksponent)

For et vilkårligt positivt tal a og en brøk på formen $\frac{p}{q}$, hvor p er et helt tal, og q er et naturligt tal, sætter vi

$$a^{\frac{p}{q}} = (\sqrt[q]{a})^p$$

Eksempel 1.5.9

Af ovenstående definition følger, at

$$4^{\frac{3}{2}} = \left(\sqrt{4}\right)^3 = 2^3 = 8 \qquad 4^{\frac{5}{3}} = \left(\sqrt[3]{4}\right)^5 \qquad 9^{\frac{4}{7}} = \sqrt[7]{9}^{\;4}$$

Det er også muligt at udvide potensbegrebet til vilkårlige eksponenter som f.eks. π og $\sqrt{11}$, således at potensregnereglerne stadig gælder, men det fører for vidt at gøre det her.