Fra ”MAT A1, stx”, Systime

5.3 Vækstegenskaber

En vigtig egenskab ved eksponentialfunktioner er, at hver gang *x* vokser med 1, så vokser eller aftager *f*(*x*) med en fast procent. Det illustreres vha. nogle eksempler.

Eksempel 7

Vi ser på eksponentialfunktionen:

$$f(x) = 7 \cdot 1{,}2^x \, .$$

Her er fremskrivningsfaktoren *a* = 1,2, og dermed vokser *f*(*x*) med 20 %, hver gang *x* vokser med 1. Dette kan vi eftervise ved at se på en tilfældig *x*-værdi, f.eks. *x* = 3 og lægge 1 til, dvs. *x* = 4: Vi udregner:

$$f(3) = 7 \cdot 1{,}2^3 = 7 \cdot 1{,}728 = 12{,}10$$

og

$$f(4) = 7 \cdot 1{,}2^4 = 7 \cdot 2{,}074 = 14{,}52.$$

Den procentvise stigning fra 12,1 til 14,5 udregnes som

$$\frac{14{,}52 - 12{,}10}{12{,}10} = \frac{2{,}42}{12{,}10} = 0{,}20 = 20\,\% \, ,$$

altså en 20 % stigning, når *x* vokser med 1.

Hvis derimod *x* vokser med 2, så vokser *f*(*x*) med faktoren $1{,}2^2$= 1,44, altså med 44 %. Dette kan vi eftervise ved at se på en tilfældig *x*-værdi, f.eks. igen *x* = 3, og lægge 2 til, dvs. *x* = 5. Vi udregner:

$$f(5) = 7 \cdot 1{,}2^5 = 7 \cdot 2{,}488 = 17{,}42.$$

Den procentvise stigning fra 12,10 til 17,42 udregnes som

$$\frac{17{,}42 - 12{,}10}{12{,}10} = \frac{5{,}32}{12{,}10} = 0{,}44 = 44\,\% \, ,$$

altså en 44 % stigning, når *x* vokser med 2.

Eksempel 8

Denne gang ser vi på en aftagende eksponentialfunktion:

$$f(x) = 9 \cdot 0{,}8^x \,.$$

Her er fremskrivningsfaktoren 0,8, og dermed er det en aftagende funktion: Hver gang x vokser med 1, så aftager $f(x)$ med 20 %, fordi $0{,}8 - 1 = -0{,}20$.

Hvis x vokser med 2, så vokser $f(x)$ med faktoren $0{,}8^2 = 0{,}64$. Det vil sige, $f(x)$ falder med 36 %, fordi $0{,}64 - 1 = -0{,}36$.

Generelt har vi følgende resultat:

Sætning 3 (Vækstegenskab for eksponentialfunktioner)

En eksponentialfunktion $f(x) = b \cdot a^x$ vil vokse med faktoren a^h, hver gang x vokser med *tilvæksten* h.

OBS! Vi har brugt Δx i stedet for h.

Eksempel 9

Betragt funktionen $f(x) = 8 \cdot 1{,}23^x$. Når x vokser med 3, med hvor mange procent vokser så $f(x)$?

Da $1{,}23^3 = 1{,}86$, vokser $f(x)$ med 86 %, når x vokser med 3.

Eksempel 10

Givet funktion $f(x) = 4 \cdot 1{,}3^x$, hvor meget skal x vokse, for at $f(x)$ vokser med 40 %?

Vi skal finde tilvæksten h, således at $1{,}3^h = 1{,}40$. Vi isolerer h vha. logaritmeregnereglen $\log a^x = x \log a$:

$$1{,}3^h = 1{,}40 \;\Leftrightarrow\; \log 1{,}3^h = \log 1{,}40 \;\Leftrightarrow\; h \log 1{,}3 = \log 1{,}40$$
$$\Leftrightarrow\; h = \frac{\log 1{,}40}{\log 1{,}3} \approx 1{,}28\ .$$

Dermed skal x vokse med 1,28, for at $f(x)$ vokser med 40 %.

Eksempel 11

Vi fortsætter med Eksempel 5 om cyklen, hvis brugtpris kan modelleres med eksponentialfunktionen

$$f(x) = 3000 \cdot 0{,}86^x\ .$$

Hvor mange procent er prisen faldet efter 3 år?

Vi sætter $h = 3$ og skal derfor udregne a^3:

$$0{,}86^3 \approx 0{,}6361\ .$$

Da $0{,}6361 - 1 = -0{,}3639$, må prisen altså være faldet med ca. 36 % efter 3 år.