Vækstegenskaber for udvalgte funktioner

Malene Cramer Engebjerg

Indhold

Absolut og relativ vækst

Forestil dig at en vare koster 200 kr. og at denne pris stiger med 15 kr. Så bliver den nye pris

$$200 \text{ kr} + 15 \text{ kr} = 215 \text{ kr}$$

En sådan prisstigning, hvor prisen vokser med en fast størrelse kaldes for en *absolut* tilvækst.

Lad os nu sige at prisen i stedet for stiger med 15%, så bliver den nye pris

$$1{,}15 \cdot 200 \text{ kr} = 230 \text{ kr}$$

Når prisen stiger med en fast procentsats, så taler man om *relativ* tilvækst.

Bemærk, at når prisen på 200 kr. vokser med en relativ tilvækst på 15%, så svarer det til en absolut tilvækst på 30 kr.

Vækstegenskab for lineære funktioner

Lineære funktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Og grafen for enhver lineær funktion er en ret linje (det kan man bevise 😊). Der gælder følgende vækstegenskab for lineære funktioner:

Sætning 1

For den lineære funktion med forskrift

$$f(x) = a \cdot x + b$$

gælder:

- Når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med a
- Når x vokser med Δx, så vokser $f(x)$ med $a \cdot \Delta x$

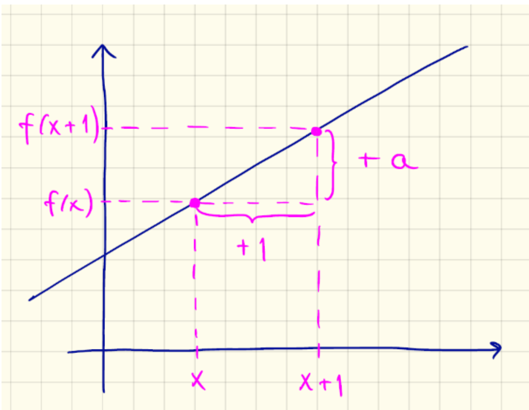
Bevis

Vi beviser først den første vækstegenskab. Vi tager udgangspunkt i en vilkårlig x-værdi. Den tilhørende funktionsværdi, vil da være

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Vi har altså et punkt på grafen for f med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se også figuren til højre.

Lader vi nu denne x-værdi vokser med 1 får vi, at den tilhørende funktionsværdi er $f(x + 1)$, svarende til at



punktet med koordinatsæt $(x+1, f(x+1))$ ligger på grafen for f (se figuren). Regner vi lidt på funktionsværdien $f(x+1)$ får vi

$$f(x+1) = a \cdot (x+1) + b$$

$$f(x+1) = a \cdot x + a + b$$

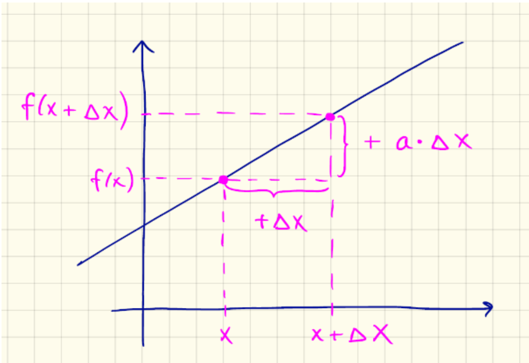
$$f(x+1) = a \cdot x + b + a$$

Og da $f(x) = a \cdot x + b$ kan vi nu omskrive ovenstående til

$$f(x+1) = f(x) + a$$

Altså ser vi nu, at når x vokser med 1, så vil funktionsværdien vokse med a, som også er illustreret på figuren ovenfor.

Beviset for den anden vækstegenskab forløber helt tilsvarende. Vi vælger igen en vilkårlig x-værdi svarende til punktet med koordinatsæt $(x, f(x))$ på grafen for f - se figuren til højre. Lader vi nu denne gang x-værdien vokse med Δx, så vi står med den nye x-værdi, $x + \Delta x$. Den tilhørende funktionsværdi vil da være



$$f(x+\Delta x) = a \cdot (x + \Delta x) + b$$

$$f(x+\Delta x) = a \cdot x + a \cdot \Delta x + b$$

$$f(x+\Delta x) = a \cdot x + b + a \cdot \Delta x$$

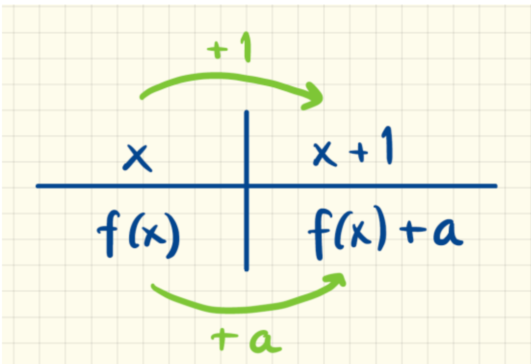
Endnu en gang udnytter vi, at $f(x) = a \cdot x + b$ og omskriver til

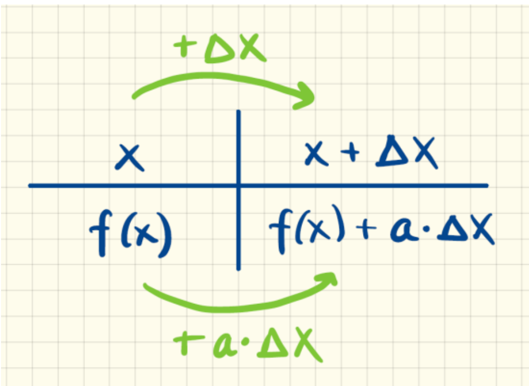
$$f(x+\Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$$

Vi ser nu, at når x vokser med Δx, så vil funktionsværdien vokse med $a \cdot \Delta x$.

$\square$

Det vil altså sige, at en absolutte tilvækst i x-værdi på Δx, giver en absolutte tilvækst i funktionsværdi på $a \cdot \Delta x$ og dette er uafhængig af udgangspunktet - dvs. det er uafhængigt af hvilken x-værdi, vi starter ved[1]. Lidt kort skriver man også, at lineær vækst er $(+,+)$-vækst. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:





[1] Dette kan man se ved, at tilvækst $a \cdot \Delta x$ ikke afhænger af det valgte udgangspunkt, som her var x.

Eksempel

Betragt den lineære funktion med forskrift

$$f(x) = 2 \cdot x - 4$$

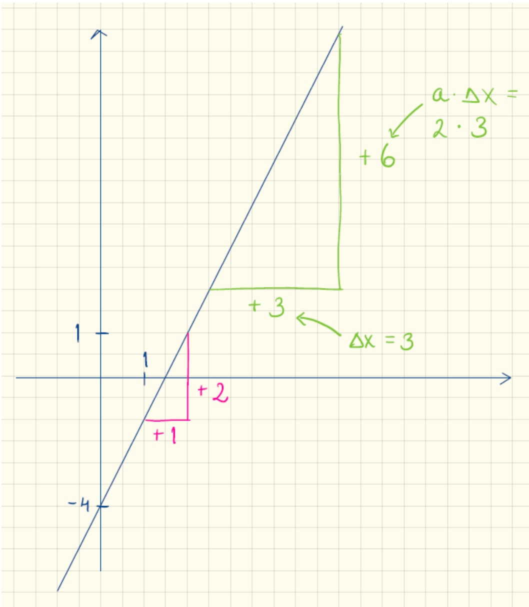
Her er $a = 2$ og $b = -4$. Grafen for f kan ses på figuren til højre. Den første vækstegenskaber siger, at når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med $a = 2$. Dette er illustreret med den lyserøde trekant på figuren.

Den anden vækstegenskab siger, at hvis x f.eks. vokser med $\Delta x = 3$, så vokser funktionsværdien med

$$a \cdot \Delta x = 2 \cdot 3 = 6.$$

Det er illustreret med den grønne trekant.

Læg mærke til at dette gælder uanset hvor på grafen, vi starter med at gå 1 eller 3 til højre. Det er det der menes, når man siger, at tilvæksten er uafhængig af udgangspunktet.



Vækstegenskab for eksponentialfunktioner

Eksponentialfunktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $a, b > 0$ og $a \neq 1$.

Der gælder følgende vækstegenskab for eksponentialfunktioner:

Sætning 2

For eksponentialfunktionen med forskrift

$$f(x) = b \cdot a^x$$

gælder:

- Når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget a
- Når x vokser med Δx, så bliver $f(x)$ ganget $a^{\Delta x}$

Bevis

Vi vælger en vilkårlig x-værdi, hvor den tilhørende funktionsværdi vil være

$$f(x) = b \cdot a^x$$

På grafen for f svarer dette til, at vi har et punkt med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se figuren. Lader vi x-værdien vokse med 1, får vi funktionsværdien

$$f(x+1) = b \cdot a^{x+1}$$

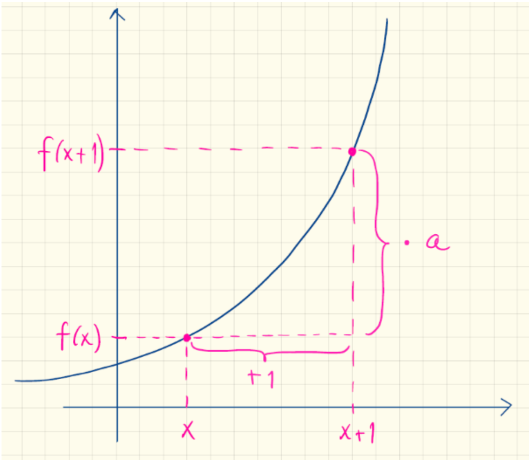
Ved hjælp af potensregnereglen $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ kan vi nu omskrive til

$$f(x+1) = b \cdot a^x \cdot a$$

Substituerer vi nu $b \cdot a^x$ med $f(x)$ fås

$$f(x+1) = f(x) \cdot a$$

Altså ser vi, at når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget med a, hvilket også er illustreret på figuren til højre.



Den anden del af beviset forløber tilsvarende. Vi vælger en vilkårlig x-værdi med tilhørende funktionsværdi

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Denne gang lader vi x vokser med Δx. Da fås funktions-værdien

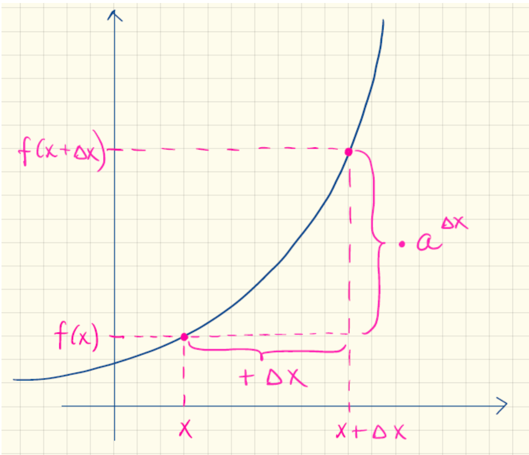
$$f(x + \Delta x) = b \cdot a^{x+\Delta x}$$

Det svarer til, at vi har et punkt på grafen for f med koordinatsæt $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ - se figuren til højre. Ovenstående udtryk omskrives igen vha. den potensregneregel, som vi lige har brugt

$$f(x + \Delta x) = b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x}$$

Og da $b \cdot a^x = f(x)$ får vi

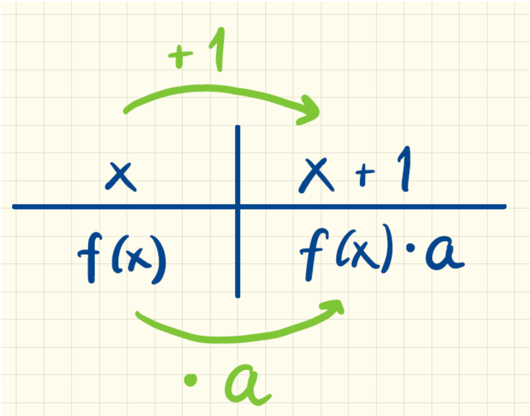
$$f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$$

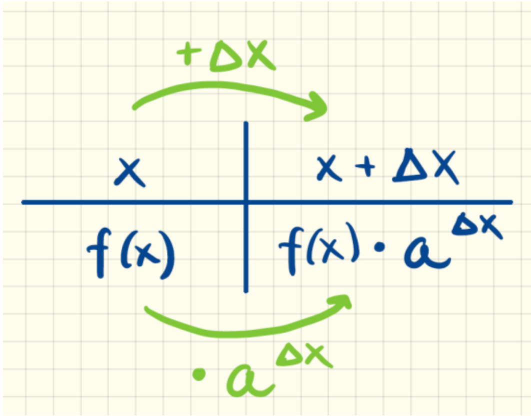


Altså når x vokser med Δx, så bliver $f(x)$ ganget med $a^{\Delta x}$, hvilket også fremgår af figuren herover.

$\square$

Det vil sige, at en absolut tilvækst i x-værdi på 1, giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $(a-1) \cdot 100\%$ (husk på at gange med a svarer til at lægge $(a-1) \cdot 100\%$ til). Og en absolut tilvækst i x-værdi på Δx, giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $\left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\%$. Lidt kort kan man skrive, at eksponentielvækst er $(+,\cdot)$-vækst. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:

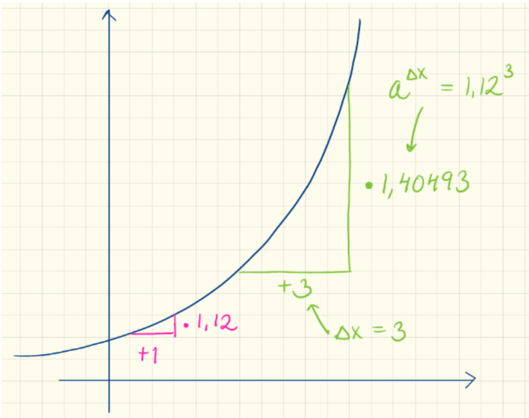




Eksempel

Betragt eksponentialfunktionen med forskrift

$$f(x) = 30 \cdot 1{,}12^x$$



Her gælder, at hver gang x vokser med 1, så bliver funktionsværdien ganget med $a = 1{,}12$. Det svarer til, at funktionsværdien vokser med

$$(1{,}12 - 1) \cdot 100\% = 12\%$$

Dette er illustreret med den lyserøde trekant på figuren til højre.

Lader vi derimod x vokse med $\Delta x = 3$, så bliver funktionsværdien ganget med

$$a^{\Delta x} = 1{,}12^3 = 1{,}40493$$

Det svarer til en procentvise stigning på

$$(1{,}40493 - 1) \cdot 100\% = 40{,}493\%$$

Det er vist på figuren med den grønne trekant.

Læg igen mærke til hvordan dette er uafhængig af udgangspunktet. Om vi lader en x-værdi på 2, 5 eller 117 vokse med 3 (til 5, 8 eller 120), så vil de tilhørende funktionsværdier altid vokse med 40,493%.

Vækstegenskab for potensfunktioner

Potensfunktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor vi forudsætter, at $x > 0$ og $b > 0$.

For potensfunktionerne gælder følgende vækstegenskab:

<u>Sætning 3</u>

For potensfunktionen med forskrift

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor $x > 0$ og $b > 0$, gælder:

- Når x bliver ganget med F_x, så bliver $f(x)$ ganget med F_y, hvor

$$F_y = (F_x)^a$$

Det vil sige,

- Når x vokser med $r_x \cdot 100\%$, så vokser $f(x)$ med $r_y \cdot 100\%$, hvor

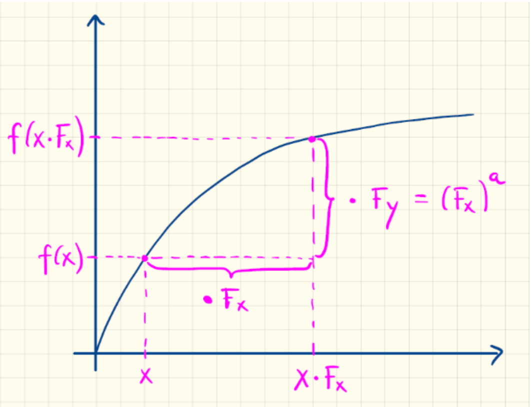
$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Bevis

Vi vælger en vilkårlig x-værdi med tilhørende funktionsværdi

$$f(x) = b \cdot x^a$$

På grafen for f svarer dette til, at vi har et punkt med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se figuren. Vi lader nu x-værdien vokse med $r_x \cdot 100\%$, hvilket svarer til at gange med fremskrivningsfaktoren



$$F_x = 1 + r_x$$

Den nye funktionsværdi vil da være

$$f(x \cdot F_x) = b \cdot (x \cdot F_x)^a$$

Vi bruger nu potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ og får

$$f(x \cdot F_x) = b \cdot x^a \cdot (F_x)^a$$

Da

$$f(x) = b \cdot x^a$$

kan vi omskrive

$$f(x \cdot F_x) = b \cdot x^a \cdot (F_x)^a = f(x) \cdot (F_x)^a$$

Altså ser vi, at den nye funktionsværdi $f(x \cdot F_x)$ fås ved at tage den "gamle" funktionsværdi $f(x)$ og fremskrive den med fremskrivningsfaktoren $(F_x)^a$. Fremskrivningsfaktoren for funktionsværdien er altså

$$F_y = (F_x)^a$$

Udtrykkes disse fremskrivningsfaktorer i stedet vha. vækstrater får vi

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a,$$

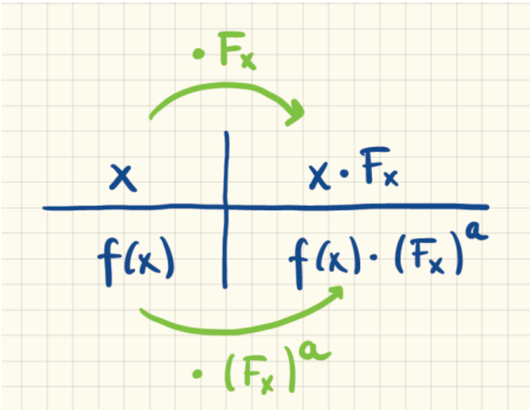
hvor her r_y er vækstraten for funktionsværdierne og r_x er vækstraten for x-værdierne.

□

Det vil sige, at en relativ tilvækst i x-værdi på $r_x \cdot 100\%$ giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $r_y \cdot 100\%$, hvor r_y kan findes vha. ligningen

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Man siger også, at potensvækst er *procent-procent vækst*. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:



Altså ser vi, at potensvækst er $(\cdot,\cdot)$-vækst.

Der er nogle, som kalder formlen:

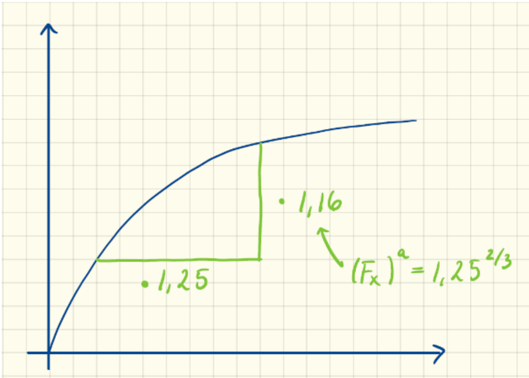
$$F_y = (F_x)^a$$

for Fy-formlen. Måske det kan være en hjælp til at huske vækstegenskaben for potensfuntkioner 😊.

Eksempel

Vi ser på potensfunktionen med forskrift

$$f(x) = 3 \cdot x^{2/3}$$



Grafen for f er vist til højre. Her er $a = 2/3$ og $b = 3$. Vi vil nu se på hvad der sker, hvis vi lader x-værdierne vokse med 25%. Det vil sige, at

$$r_x = 25\% = 0,25$$

Det svarer til fremskrivningsfaktoren

$$F_x = 1 + 0,25 = 1,25$$

Fremskrivningsfaktoren for funktionsværdierne bliver så

$$F_y = (F_x)^a = 1,25^{2/3} = 1,16$$

Altså er $F_y = 1 + r_y = 1,16$. Det vil sige, at

$$r_y = 1,16 - 1 = 0,16 = 16\%$$

Det betyder, at hvis vi lader en hvilken som helst x-værdi vokse med 25%, så vil funktionsværdien altid vokse med 16%. Dette er også illustreret på figuren ovenfor.

Overblik

I tabellen herunder ses en sammenligning mellem vækstegenskaberne for hhv. lineære, eksponential- og potensfunktioner.

Lineær funktion	**Eksponentialfunktion**	**Potensfunktioner**
$f(x) = a \cdot x + b$	$f(x) = b \cdot a^x$	$f(x) = b \cdot x^a$
Når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med a.	Når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget med a.	Når x bliver ganget med $F_x = 1 + r_x$, så bliver $f(x)$ ganget med $F_y = 1 + r_y$ hvor $F_y = (F_x)^a = (1 + r_x)^a$
Når x vokser med Δx, så vokser $f(x)$ med $a \cdot \Delta x$.	Når x vokser med Δx, så bliver $f(x)$ ganget med $a^{\Delta x}$.	
$(+,+)$-vækst	$(+,\cdot)$-vækst	$(\cdot,\cdot)$-vækst
En absolut tilvækst i x på Δx, giver altid den samme absolutte tilvækst i funktionsværdi på $a \cdot \Delta x$	En absolut tilvækst i x på Δx, giver altid den samme relative tilvækst i funktionsværdi på $\left(a^{\Delta x} - 1\right) \cdot 100\%$	En relativ tilvækst i x på $r_x \cdot 100\%$ giver altid den samme relative tilvækst i funktionsværdi på $((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$