

Vækstegenskaber for udvalgte funktioner

Malene Cramer Engebjerg

Indhold

Absolut og relativ vækst.....	3
Vækstegenskab for lineære funktioner.....	3
Vækstegenskab for eksponentialfunktioner.....	5
Vækstegenskab for potensfunktioner.....	8
Overblik.....	10

Absolut og relativ vækst

Forestil dig at en vare koster 200 kr. og at denne pris stiger med 15 kr. Så bliver den nye pris

$$200 \text{ kr} + 15 \text{ kr} = 215 \text{ kr}$$

En sådan prisstigning, hvor prisen vokser med en fast størrelse kaldes for en *absolut* tilvækst.

Lad os nu sige at prisen i stedet for stiger med 15%, så bliver den nye pris

$$1,15 \cdot 200 \text{ kr} = 230 \text{ kr}$$

Når prisen stiger med en fast procentsats, så taler man om *relativ* tilvækst.

Bemærk, at når prisen på 200 kr. vokser med en relativ tilvækst på 15%, så svarer det til en absolut tilvækst på 30 kr.

Vækstegenskab for lineære funktioner

Lineære funktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Og grafen for enhver lineær funktion er en ret linje (det kan man bevise 😊). Der gælder følgende vækstegenskab for lineære funktioner:

Sætning 1

For den lineære funktion med forskrift

$$f(x) = a \cdot x + b$$

gælder:

- Når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med a
- Når x vokser med Δx , så vokser $f(x)$ med $a \cdot \Delta x$

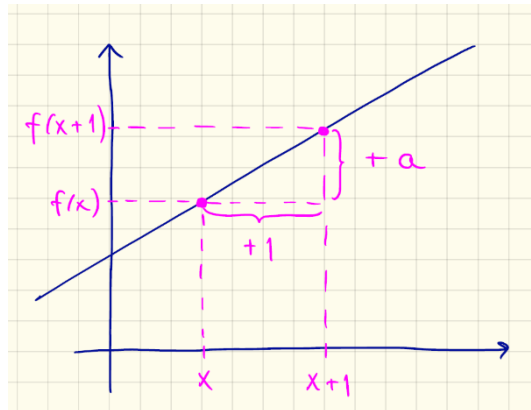
Bevis

Vi beviser først den første vækstegenskab. Vi tager udgangspunkt i en vilkårlig x -værdi. Den tilhørende funktionsværdi, vil da være

$$f(x) = a \cdot x + b$$

Vi har altså et punkt på grafen for f med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se også figuren til højre.

Lader vi nu denne x -værdi vokser med 1 får vi, at den tilhørende funktionsværdi er $f(x + 1)$, svarende til at



punktet med koordinatsæt $(x + 1, f(x + 1))$ ligger på grafen for f (se figuren). Regner vi lidt på funktionsværdien $f(x + 1)$ får vi

$$f(x + 1) = a \cdot (x + 1) + b$$

$$f(x + 1) = a \cdot x + a + b$$

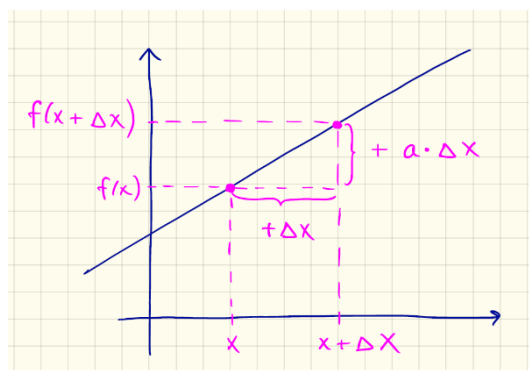
$$f(x + 1) = a \cdot x + b + a$$

Og da $f(x) = a \cdot x + b$ kan vi nu omskrive ovenstående til

$$f(x + 1) = f(x) + a$$

Altså ser vi nu, at når x vokser med 1, så vil funktionsværdien vokse med a , som også er illustreret på figuren ovenfor.

Beviset for den anden vækstegenskab forløber helt tilsvarende. Vi vælger igen en vilkårlig x -værdi svarende til punktet med koordinatsæt $(x, f(x))$ på grafen for f - se figuren til højre. Lader vi nu denne gang x -værdien vokse med Δx , så vi står med den nye x -værdi, $x + \Delta x$. Den tilhørende funktionsværdi vil da være



$$f(x + \Delta x) = a \cdot (x + \Delta x) + b$$

$$f(x + \Delta x) = a \cdot x + a \cdot \Delta x + b$$

$$f(x + \Delta x) = a \cdot x + b + a \cdot \Delta x$$

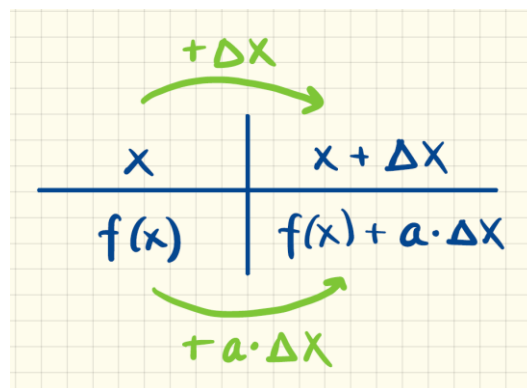
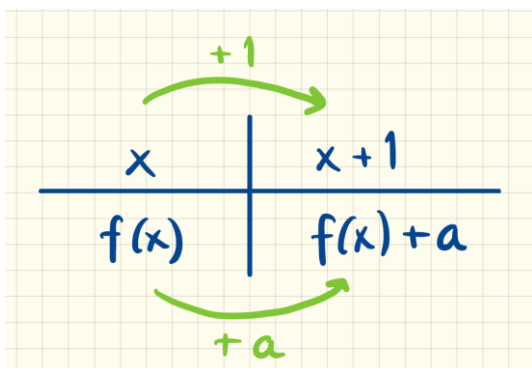
Endnu en gang udnytter vi, at $f(x) = a \cdot x + b$ og omskriver til

$$f(x + \Delta x) = f(x) + a \cdot \Delta x$$

Vi ser nu, at når x vokser med Δx , så vil funktionsværdien vokse med $a \cdot \Delta x$.

□

Det vil altså sige, at en absolutte tilvækst i x -værdi på Δx , giver en absolutte tilvækst i funktionsværdi på $a \cdot \Delta x$ og dette er uafhængig af udgangspunktet - dvs. det er uafhængigt af hvilken x -værdi, vi starter ved¹. Lidt kort skriver man også, at lineær vækst er (+, +)-vækst. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:



¹ Dette kan man se ved, at tilvækst $a \cdot \Delta x$ ikke afhænger af det valgte udgangspunkt, som her var x .

Eksempel

Betragt den lineære funktion med forskrift

$$f(x) = 2 \cdot x - 4$$

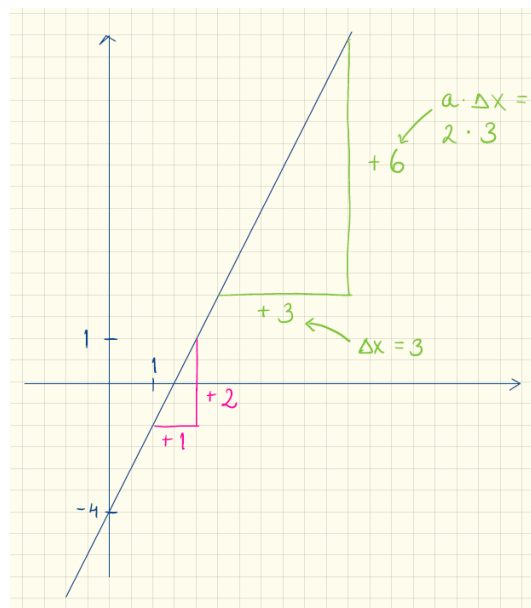
Her er $a = 2$ og $b = -4$. Grafen for f kan ses på figuren til højre. Den første vækstegenskaber siger, at når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med $a = 2$. Dette er illustreret med den lyserøde trekant på figuren.

Den anden vækstegenskab siger, at hvis x f.eks. vokser med $\Delta x = 3$, så vokser funktionsværdien med

$$a \cdot \Delta x = 2 \cdot 3 = 6.$$

Det er illustreret med den grønne trekant.

Læg mærke til at dette gælder uanset hvor på grafen, vi starter med at gå 1 eller 3 til højre. Det er det der menes, når man siger, at tilvæksten er uafhængig af udgangspunktet.



Vækstegenskab for eksponentialfunktioner

Eksponentialfunktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = b \cdot a^x$$

hvor $a, b > 0$ og $a \neq 1$.

Der gælder følgende vækstegenskab for eksponentialfunktioner:

Sætning 2

For eksponentialfunktionen med forskrift

$$f(x) = b \cdot a^x$$

gælder:

- Når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget a
- Når x vokser med Δx , så bliver $f(x)$ ganget $a^{\Delta x}$

Bevis

Vi vælger en vilkårlig x -værdi, hvor den tilhørende funktionsværdi vil være

$$f(x) = b \cdot a^x$$

På grafen for f svarer dette til, at vi har et punkt med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se figuren. Lader vi x -værdien vokse med 1, får vi funktionsværdien

$$f(x + 1) = b \cdot a^{x+1}$$

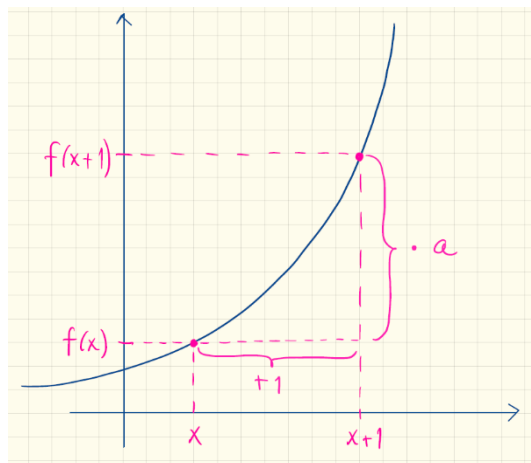
Ved hjælp af potensregnereglen $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$ kan vi nu omskrive til

$$f(x + 1) = b \cdot a^x \cdot a$$

Substituerer vi nu $b \cdot a^x$ med $f(x)$ fås

$$f(x + 1) = f(x) \cdot a$$

Altså ser vi, at når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget med a , hvilket også er illustreret på figuren til højre.



Den anden del af beviset forløber tilsvarende. Vi vælger en vilkårlig x -værdi med tilhørende funktionsværdi

$$f(x) = b \cdot a^x$$

Denne gang lader vi x vokse med Δx . Da fås funktionsværdien

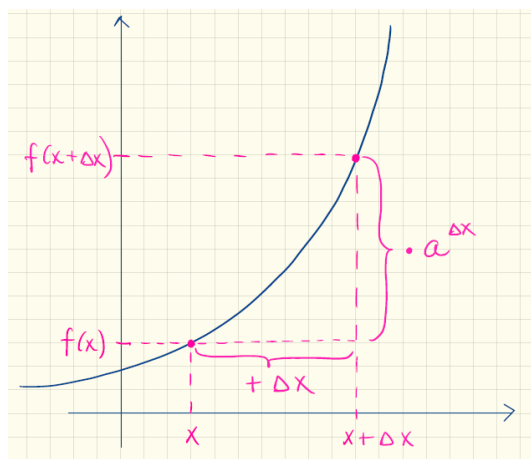
$$f(x + \Delta x) = b \cdot a^{x+\Delta x}$$

Det svarer til, at vi har et punkt på grafen for f med koordinatsæt $(x + \Delta x, f(x + \Delta x))$ - se figuren til højre. Ovenstående udtryk omskrives igen vha. den potensregneregler, som vi lige har brugt

$$f(x + \Delta x) = b \cdot a^x \cdot a^{\Delta x}$$

Og da $b \cdot a^x = f(x)$ får vi

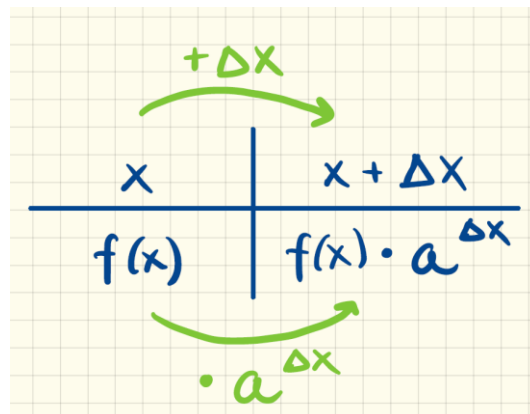
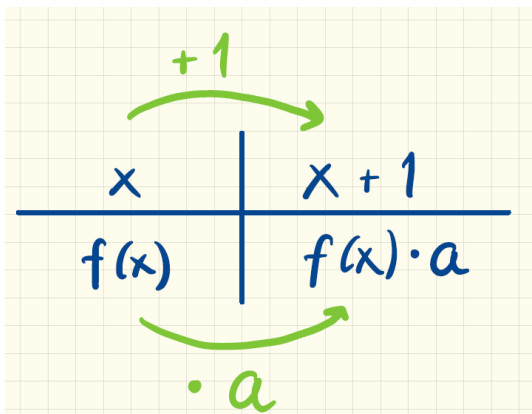
$$f(x + \Delta x) = f(x) \cdot a^{\Delta x}$$



Altså når x vokser med Δx , så bliver $f(x)$ ganget med $a^{\Delta x}$, hvilket også fremgår af figuren herover.

□

Det vil sige, at en absolut tilvækst i x -værdi på 1, giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $(a - 1) \cdot 100\%$ (husk på at gange med a svarer til at lægge $(a - 1) \cdot 100\%$ til). Og en absolut tilvækst i x -værdi på Δx , giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $(a^{\Delta x} - 1) \cdot 100\%$. Lidt kort kan man skrive, at eksponentielvækst er $(+, \cdot)$ -vækst. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:



Eksempel

Betragt eksponentialfunktionen med forskrift

$$f(x) = 30 \cdot 1,12^x$$

Her gælder, at hver gang x vokser med 1, så bliver funktionsværdien ganget med $a = 1,12$. Det svarer til, at funktionsværdien vokser med

$$(1,12 - 1) \cdot 100\% = 12\%$$

Dette er illustreret med den lyserøde trekant på figuren til højre.

Lader vi derimod x vokse med $\Delta x = 3$, så bliver funktionsværdien ganget med

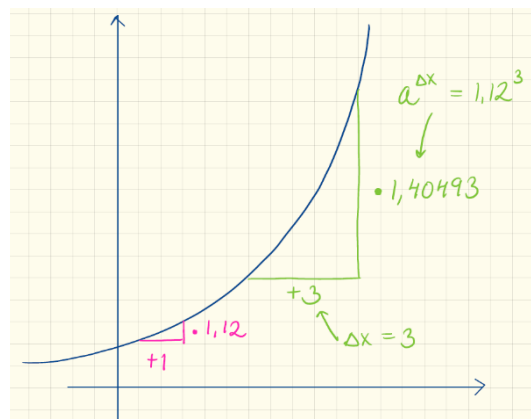
$$a^{\Delta x} = 1,12^3 = 1,40493$$

Det svarer til en procentvise stigning på

$$(1,40493 - 1) \cdot 100\% = 40,493\%$$

Det er vist på figuren med den grønne trekant.

Læg igen mærke til hvordan dette er uafhængig af udgangspunktet. Om vi lader en x -værdi på 2, 5 eller 117 vokse med 3 (til 5, 8 eller 120), så vil de tilhørende funktionsværdier altid vokse med 40,493%.



Vækstegenskab for potensfunktioner

Potensfunktioner har en forskrift på formen

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor vi forudsætter, at $x > 0$ og $b > 0$.

For potensfunktionerne gælder følgende vækstegenskab:

Sætning 3

For potensfunktionen med forskrift

$$f(x) = b \cdot x^a,$$

hvor $x > 0$ og $b > 0$, gælder:

- Når x bliver ganget med F_x , så bliver $f(x)$ ganget med F_y , hvor

$$F_y = (F_x)^a$$

Det vil sige,

- Når x vokser med $r_x \cdot 100\%$, så vokser $f(x)$ med $r_y \cdot 100\%$, hvor

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Bevis

Vi vælger en vilkårlig x -værdi med tilhørende funktionsværdi

$$f(x) = b \cdot x^a$$

På grafen for f svarer dette til, at vi har et punkt med koordinatsæt $(x, f(x))$ - se figuren. Vi lader nu x -værdien vokse med $r_x \cdot 100\%$, hvilket svarer til at gange med fremskrivningsfaktoren

$$F_x = 1 + r_x$$

Den nye funktionsværdi vil da være

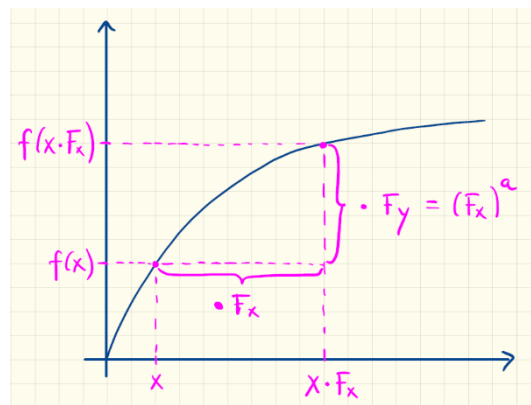
$$f(x \cdot F_x) = b \cdot (x \cdot F_x)^a$$

Vi bruger nu potensregnereglen $(a \cdot b)^p = a^p \cdot b^p$ og får

$$f(x \cdot F_x) = b \cdot x^a \cdot (F_x)^a$$

Da

$$f(x) = b \cdot x^a$$



kan vi omskrive

$$f(x \cdot F_x) = b \cdot x^a \cdot (F_x)^a = f(x) \cdot (F_x)^a$$

Altså ser vi, at den nye funktionsværdi $f(x \cdot F_x)$ fås ved at tage den "gamle" funktionsværdi $f(x)$ og fremskrive den med fremskrivningsfaktoren $(F_x)^a$. Fremskrivningsfaktoren for funktionsværdien er altså

$$F_y = (F_x)^a$$

Udtrykkes disse fremskrivningsfaktorer i stedet vha. vækstrater får vi

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a,$$

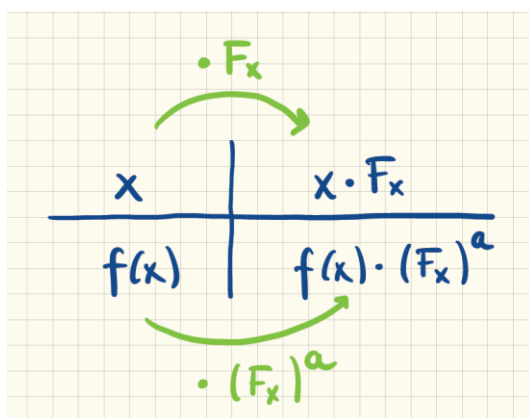
hvor her r_y er vækstraten for funktionsværdierne og r_x er vækstraten for x -værdierne.

□

Det vil sige, at en relativ tilvækst i x -værdi på $r_x \cdot 100\%$ giver en relativ tilvækst i funktionsværdi på $r_y \cdot 100\%$, hvor r_y kan findes vha. ligningen

$$1 + r_y = (1 + r_x)^a$$

Man siger også, at potensvækst er *procent-procent vækst*. I tabelform kan vækstegenskaben illustreres sådan her:



Altså ser vi, at potensvækst er (\cdot, \cdot) -vækst.

Der er nogle, som kalder formelen:

$$F_y = (F_x)^a$$

for F_y -formlen. Måske det kan være en hjælp til at huske vækstegenskaben for potensfunktioner 😊.

Eksempel

Vi ser på potensfunktionen med forskrift

$$f(x) = 3 \cdot x^{2/3}$$

Grafen for f er vist til højre. Her er $a = 2/3$ og $b = 3$. Vi vil nu se på hvad der sker, hvis vi lader x -værdierne vokse med 25%. Det vil sige, at

$$r_x = 25\% = 0,25$$

Det svarer til fremskrivningsfaktoren

$$F_x = 1 + 0,25 = 1,25$$

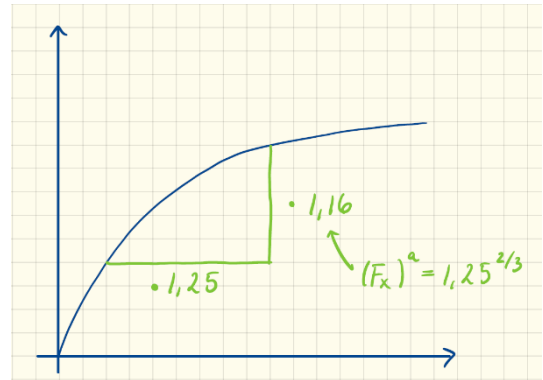
Fremskrivningsfaktoren for funktionsværdierne bliver så

$$F_y = (F_x)^a = 1,25^{2/3} = 1,16$$

Altså er $F_y = 1 + r_y = 1,16$. Det vil sige, at

$$r_y = 1,16 - 1 = 0,16 = 16\%$$

Det betyder, at hvis vi lader en hvilken som helst x -værdi vokse med 25%, så vil funktionsværdien altid vokse med 16%. Dette er også illustreret på figuren ovenfor.



Overblik

I tabellen herunder ses en sammenligning mellem vækstegenskaberne for hhv. lineære, eksponential- og potensfunktioner.

Lineær funktion	Eksponentialfunktion	Potensfunktioner
$f(x) = a \cdot x + b$	$f(x) = b \cdot a^x$	$f(x) = b \cdot x^a$
Når x vokser med 1, så vokser $f(x)$ med a .	Når x vokser med 1, så bliver $f(x)$ ganget med a .	Når x bliver ganget med $F_x = 1 + r_x$, så bliver $f(x)$ ganget med $F_y = 1 + r_y$
Når x vokser med Δx , så vokser $f(x)$ med $a \cdot \Delta x$.	Når x vokser med Δx , så bliver $f(x)$ ganget med $a^{\Delta x}$.	hvor $F_y = (F_x)^a = (1 + r_x)^a$
(+, +)-vækst	(+, ·)-vækst	(·, ·)-vækst
En absolut tilvækst i x på Δx , giver altid den samme absolutte tilvækst i funktionsværdi på $a \cdot \Delta x$	En absolut tilvækst i x på Δx , giver altid den samme relative tilvækst i funktionsværdi på $(a^{\Delta x} - 1) \cdot 100\%$	En relativ tilvækst i x på $r_x \cdot 100\%$ giver altid den samme relative tilvækst i funktionsværdi på $((1 + r_x)^a - 1) \cdot 100\%$