

6.8 Harmoniske svingninger (kilde: MAT A2, stx, Systime)

Vi skal nu se nærmere på funktioner af typen

$$f(x) = a \sin(bx + c) + k ,$$

hvor a , b , c og k er konstanter, og hvor $b > 0$.

Graferne for denne type funktioner kaldes for *harmoniske svingninger*, og de kan opfattes som en udvidelse af funktionen $\sin x$.

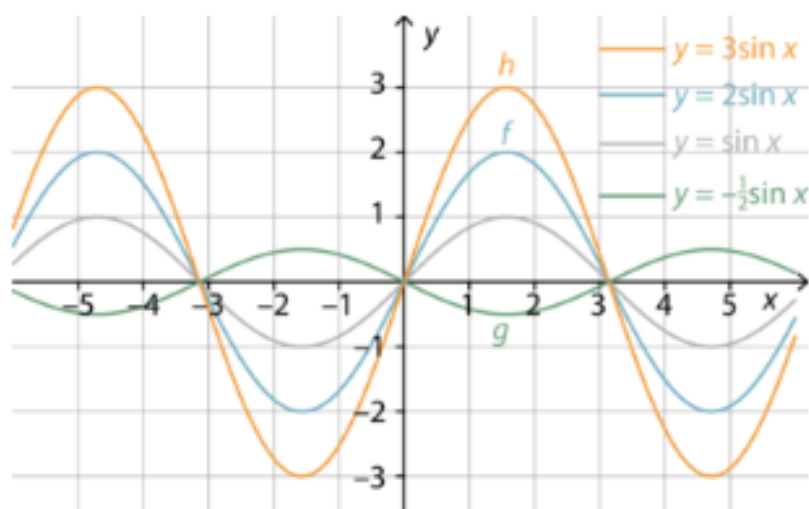
Vi har tidligere set, hvordan både rette linjer og parablers grafiske forløb afhænger af de koefficienter a , b , c osv., der indgår i forskriften. På samme måde har konstanterne a , b , c og k afgørende betydning for de harmoniske svingningers forløb og placering i koordinatsystemet. I dette afsnit skal vi se, præcis hvilken betydning, hver af disse konstanter har.

Betydning af a



På figur 30 ses grafen for $\sin x$ sammen med graferne for funktionerne

$$f(x) = 2 \sin x, \quad g(x) = -\frac{1}{2} \sin x \quad \text{og} \quad h(x) = 3 \sin x.$$



Figur 30

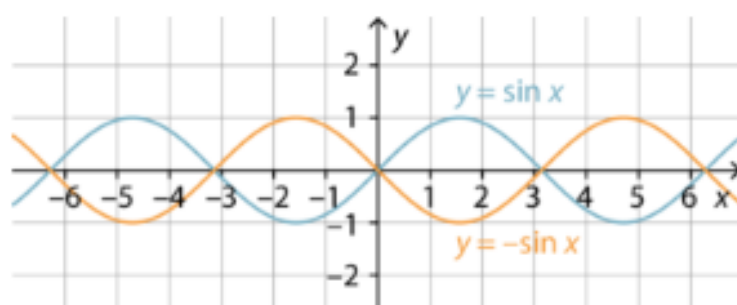
Af figuren ses, at forskellen på graferne er bølgenes højde. Konstanten a har altså betydning for, hvor høje grafens bølger er.

Tallet $|a|$ kaldes for *amplituden* og angiver, hvor høje svingningens bølger er i forhold til den vandrette midterakse, grafen svinger om.

Amplituden er givet ved halvdelen af forskellen på y -værdien for en bølgetop (y_{\max}) og en bølgedal (y_{\min}):

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2}.$$

Graferne $f(x) = a\sin(bx + c)$ og $g(x) = -a\sin(bx + c)$ er hinandens spejlbilleder i x -aksen. På figur 31 ses graferne for $y = \sin x$ og $y = -\sin x$.



Figur 31

Hér ses, at $y = -\sin x$ er spejlbilledet af grafen for $y = \sin x$ med x -aksen som spejlingsakse.

Funktionerne $y = \sin x$ og $y = -\sin x$ har begge amplituden 1, idet

$$|-1| = |1| = 1.$$

Betydning af b

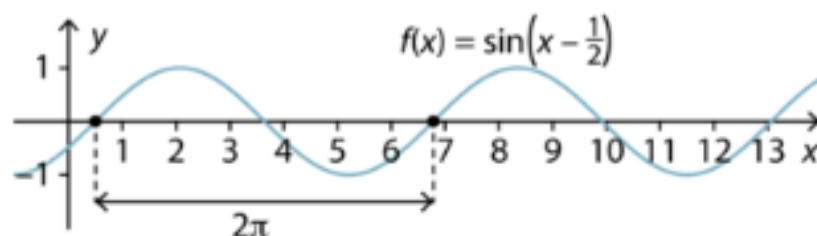
Funktionen $y = \sin x$ har perioden 2π . Dette skyldes, at grafen udfører en fuld svingning, når x gennemløber tallene fra 0 til 2π . Når x gennemløber tallene fra 2π til 4π , udfører grafen ligeledes en fuld svingning.

Eftersom funktionen udfører 1 svingning, når x varierer fra 0 til 2π , kan vi skrive, at:

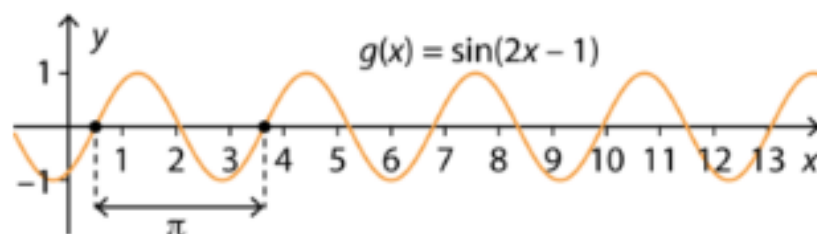
$$0 \leq x \leq 2\pi : 1 \text{ svingning.}$$

På figur 32, 33 og 34 ses graferne for funktionerne

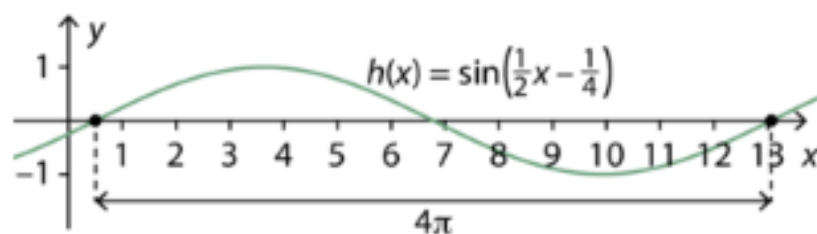
$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right), \quad g(x) = \sin(2x - 1) \quad \text{og} \quad h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right).$$



Figur 32



Figur 33



Figur 34

Af figurene fremgår det, at perioden er forskellig for hver af de tre grafer. Perioden kaldes også for *svingningstiden*, og det ses på figurene, at svingningstiden for $g(x)$ er halvt så lang som svingningstiden for $f(x)$. Desuden er svingningstiden for $h(x)$ dobbelt så lang som svingningstiden for $f(x)$.

Funktionen $g(x)$ vil udføre 1 svingning (en fuld periode), når størrelsen $2x - 1$ har gennemløbet tallene fra 0 til 2π . Om funktionen $g(x)$ gælder det derfor, at

$$0 \leq 2x - 1 \leq 2\pi \quad : \quad 1 \text{ svingning.}$$

Vi omskriver nu denne ulighed:

$$\begin{aligned}0 \leq 2x - 1 \leq 2\pi &\Leftrightarrow 1 \leq 2x \leq 2\pi + 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \frac{2\pi + 1}{2} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{2} \leq x \leq \pi + \frac{1}{2} : 1 \text{ svingning.}\end{aligned}$$

Ud fra dette ses det, at i x -intervallet $[\frac{1}{2}; \pi + \frac{1}{2}]$ udfører funktionen præcis 1 svingning. Dette interval har længden

$$\left| \pi + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \right| = \pi.$$

Det interval, x skal gennemløbe, for at funktionen udfører 1 svingning, har altså længden π . Funktionen $g(x) = \sin(2x - 1)$ har svingningstiden π , som påstået ovenfor. Tilsvarende kan vi behandle funktionen $h(x)$.

Vi ser nu på funktioner af typen

$$f(x) = a \sin(bx + c).$$

Denne type funktion udfører 1 svingning, når

$$0 \leq bx + c \leq 2\pi.$$

Vi løser nu denne ulighed som ovenfor og får, at

$$\begin{aligned}0 \leq bx + c \leq 2\pi &\Leftrightarrow -c \leq bx \leq 2\pi - c \Leftrightarrow \frac{-c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi - c}{b} \\ &\Leftrightarrow \frac{-c}{b} \leq x \leq \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} : 1 \text{ svingning,}\end{aligned}$$

hvor vi undervejs har benyttet, at man kan dividere en ulighed med et positivt tal på begge sider af ulighedstegnet.

Vi har dermed, at funktionen udfører 1 svingning, når x varierer fra $\frac{-c}{b}$ til $\frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b}$. Afstanden mellem disse to x -værdier er

$$\left| \frac{2\pi}{b} - \frac{c}{b} - \frac{-c}{b} \right| = \frac{2\pi}{b}.$$

Funktionen $f(x) = a \sin(bx + c)$ udfører således 1 svingning, når x varierer over et interval, der har længden $\frac{2\pi}{b}$. Vi har derfor, at svingningstiden (perioden) T for funktioner af typen $f(x) = a \sin(bx + c)$ er givet ved

$$T = \frac{2\pi}{b}.$$

Grunden til, at længden af 1 svingning betegnes *svingningstiden*, er, at man i mange anvendelser opfatter x som en variabel, der angiver tiden.

Funktionerne

$$f(x) = \sin\left(x - \frac{1}{2}\right) \quad \text{og} \quad h(x) = \sin\left(\frac{1}{2}x - \frac{1}{4}\right)$$

har svingningstiderne

$$\frac{2\pi}{1} = 2\pi \approx 6,28 \quad \text{og} \quad \frac{2\pi}{\frac{1}{2}} = 4\pi \approx 12,6.$$

Antallet af svingninger pr. tidsenhed (sekunder, minutter,...) kaldes *frekvensen*. Hvis svingningstiden f.eks. er 0,2 sekunder, vil funktionen udføre 5 svingninger pr. sekund. I almindelighed er frekvensen F givet ved

$$F = \frac{1}{T} = \frac{b}{2\pi}.$$

Funktionen ovenfor, $g(x) = \sin(2x - 1)$, har således frekvensen

$$\frac{2}{2\pi} = \frac{1}{\pi} \approx 0,32.$$

Det vil sige, at denne funktion svinger 0,32 gange pr. enhed på x -aksen.

Betydning af C

⋮

Grafen for $y = \sin x$ begynder en svingning, når $x = 0$, dvs. i punktet $(0, 0)$. I dette punkt er grafen voksende.

Ovenfor så vi, at funktionen $f(x) = a\sin(bx + c)$ tilsvarende begynder en svingning, når $x = \frac{-c}{b}$. Punktet $(0, 0)$ på grafen for $y = \sin x$ er derfor forskudt til punktet $(\frac{-c}{b}, 0)$ på grafen for $f(x) = a\sin(bx + c)$. Tallet

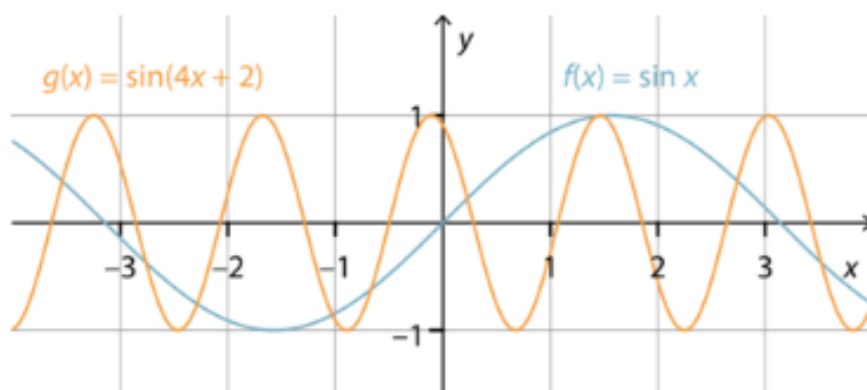
$$\frac{-c}{b}$$

kaldes *faseforskydningen*.

På figur 35 er graferne for funktionerne

$$f(x) = \sin x \quad \text{og} \quad g(x) = \sin(4x + 2)$$

indtegnet i samme koordinatsystem.



Figur 35

Svingningstiden for $g(x)$ er

$$T = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2} = 1,57.$$

På figuren ses det, at grafen for $g(x)$ begynder en svingning i punktet $(-\frac{1}{2}, 0)$. Dette skyldes, at der for $g(x)$ gælder, at

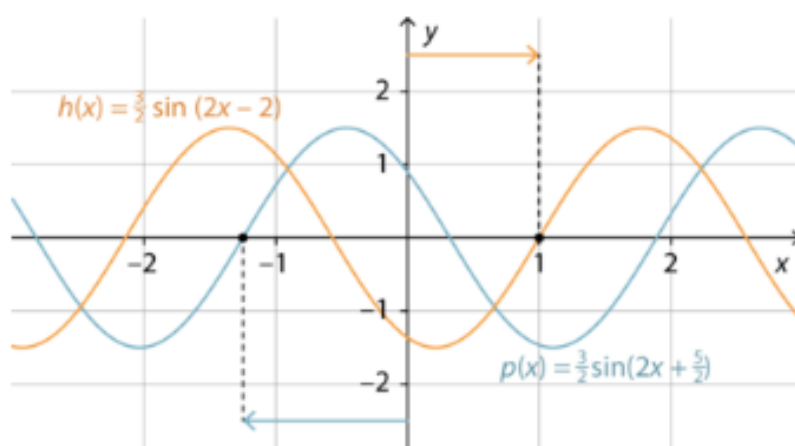
$$\frac{-c}{b} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Sammenlignet med $f(x) = \sin x$ er $g(x)$ således forskudt $-\frac{1}{2}$ i x -aksens retning. Altså er faseforskydningen for $g(x)$ $-\frac{1}{2}$.

På figur 36 ses graferne for funktionerne

$$h(x) = \frac{3}{2} \sin(2x - 2) \quad \text{og} \quad p(x) = \frac{3}{2} \sin\left(2x + \frac{5}{2}\right),$$

begge med periode π og amplituden $\frac{3}{2}$.



Figur 36

Grafen for $h(x)$ har faseforskydningen

$$\frac{-c}{b} = \frac{-(-2)}{2} = 1$$

og $p(x)$ har faseforskydningen

$$\frac{-c}{b} = \frac{-\frac{5}{2}}{2} = -\frac{5}{4}.$$

På figuren ses det således, at $h(x)$ begynder en svingning i punktet $(1, 0)$, og at $p(x)$ begynder en svingning i punktet $(-\frac{5}{4}; 0)$.

Når vi i praksis aflæser faseforskydningen ud fra grafen for en harmonisk svingning, gøres det på følgende måde:

Hvis koefficienten a er positiv, skal vi aflæse x -værdien for et punkt, hvor grafen er voksende og skærer den vandrette midterakse, grafen svinger om. Hvis a er negativ, skal vi aflæse x -værdien for et punkt, hvor grafen er aftagende og skærer den vandrette midterakse, grafen svinger om.

På figuren ovenfor kan man opfatte grafen for $p(x)$ som den graf, der fremkommer, hvis vi parallelforskyder grafen for $y = \frac{3}{2} \sin(2x)$ mod venstre med $\frac{5}{4}$ enhed. Grafen for $p(x)$ fremkommer imidlertid også, hvis vi parallelforskyder grafen for $y = \frac{3}{2} \sin(2x)$ mod højre med 1,9 (eftersom grafen for $p(x)$ også begynder en svingning i $x = \pi - \frac{5}{4} \approx 1,9$).

Der er således flere muligheder for, hvor man kan aflæse faseforskydningen på grafen for en harmonisk svingning.

Betydning af k

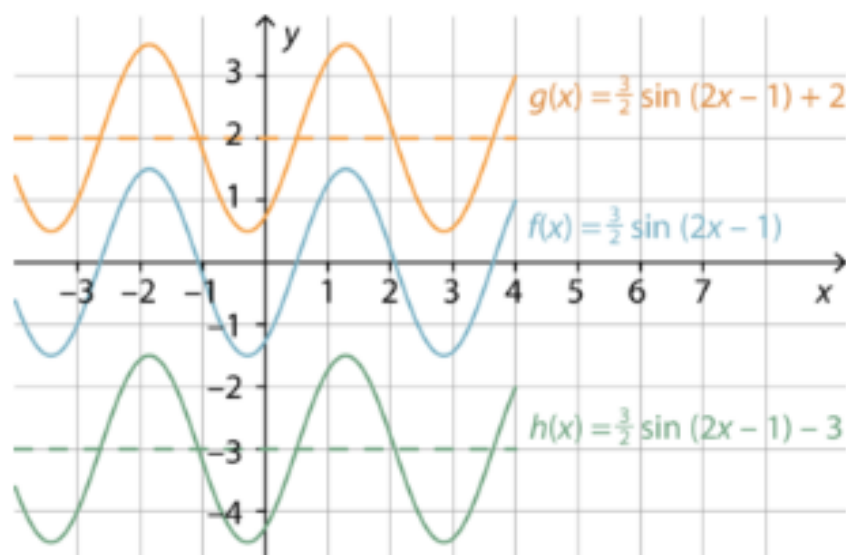
⋮

I det generelle udtryk for harmoniske svingninger $f(x) = a \sin(bx + c) + k$, mangler vi at se på k 's betydning. Vi ser derfor på funktionerne

$$f(x) = \frac{3}{2} \sin(2x-1), \quad g(x) = \frac{3}{2} \sin(2x-1)+2, \quad h(x) = \frac{3}{2} \sin(2x-1)-3,$$

svarende til $k = 0$, $k = 2$ og $k = -3$.

Hvis vi ændrer tallet k , forskydes grafen op eller ned (se figur 37). Grafen for $g(x)$ fås således ved at forskyde grafen for $f(x)$ 2 enheder i lodret retning, og grafen for $h(x)$ fås ved at parallelforskyde grafen for $f(x)$ 3 enheder nedad.



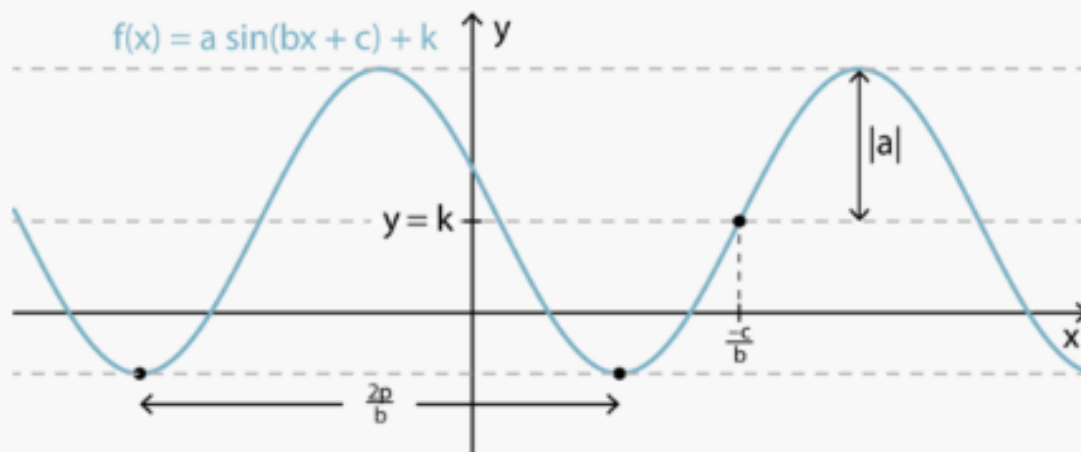
Figur 37

Linjen med ligningen $y = k$ er den vandrette akse, som grafen svinger om. Denne akse kaldes for svingningens *midterakse*.

Grafen $g(x)$ har $k = 2$, og grafen svinger derfor om den vandrette linje $y = 2$. På tilsvarende måde ses, at $f(x)$ svinger om x -aksen ($y = 0$), og at $h(x)$ svinger om linjen $y = -3$.

I oversigten nedenfor gives en sammenfatning af, hvordan koefficienterne a , b , c og k kan aflæses og beregnes ud fra grafen for en harmonisk svingning. På figur 38 er faseforskydningen markeret under forudsætning af, at koefficienten a er positiv. Faseforskydningen kan som nævnt aflæses flere steder på grafen for en harmonisk svingning. På figur 38 er det punkt med den mindste, positive x -værdi valgt. Denne faseforskydning vil svare til en negativ c -værdi i forskriften.

Harmonisk svingning



Figur 38

Amplituden $|a|$ angiver grafens udsving fra den vandrette midterakse, og

$$|a| = \frac{y_{\max} - y_{\min}}{2} .$$

Perioden T angiver grafens svingningstid, og

$$T = \frac{2\pi}{b} .$$

Grafens faseforskydning angiver grafens vandrette parallelforskydning. Faseforskydningen beregnes som

$$\frac{-c}{b} .$$

Den vandrette midterakse, grafen svinger om, angiver grafens lodrette parallelforskydning k , hvor

$$k = \frac{y_{\max} + y_{\min}}{2} .$$

Eksempel 7

En funktion $f(x)$ har forskriften

$$f(x) = 5 \sin(4x + 8) + 3.$$

Vi ønsker at tegne grafen for denne funktion.

Af forskriften kan vi se, at $a = 5$, og grafen har derfor amplitude 5.

Derudover ses af forskriften, at grafen har $k = 3$ som midterakse. Grafen skal altså svinge symmetrisk om den vandrette akse $y = 3$. Vi kan desuden slutte, at

$$y_{\max} = 3 + 5 = 8 \quad \text{og} \quad y_{\min} = 3 - 5 = -2.$$

Grafen svinger altså mellem y -værdierne $y_{\max} = 8$ og $y_{\min} = -2$.

Funktionens periode T er givet ved

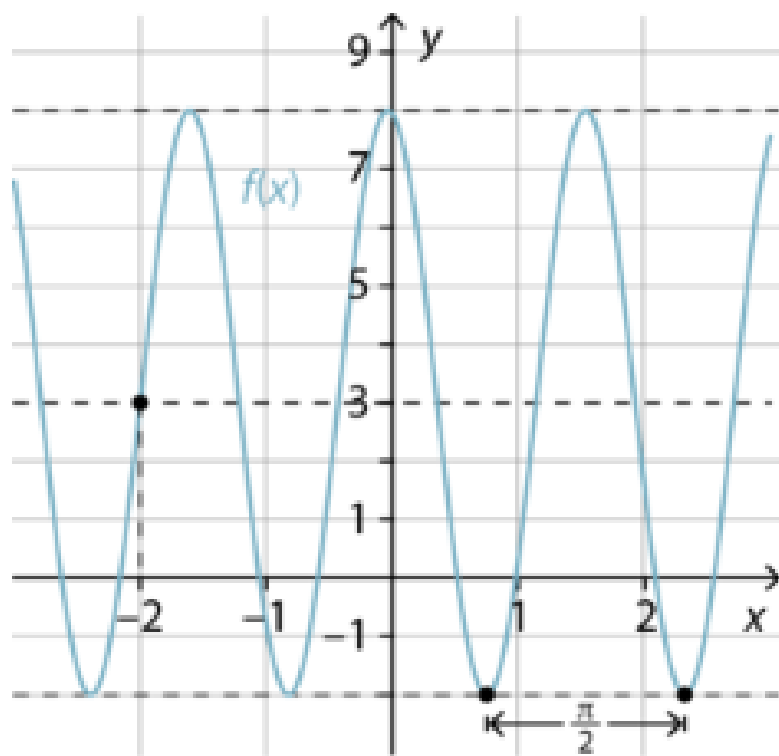
$$T = \frac{2\pi}{b} = \frac{2\pi}{4} = \frac{\pi}{2}.$$

Faseforskydningen er givet ved

$$\frac{-c}{b} = \frac{-8}{4} = -2.$$

Dette vil sige, at grafen skal begynde en svingning i et punkt med x -værdien -2 . Da $a > 0$ og grafens midterakse er linjen $y = 3$, kan vi slutte, at grafen begynder en opadgående svingning i punktet $(-2, 3)$.

Grafen ses på figur 39:



Figur 39