

Løsning af andengradsligninger

Vi vil bevise denne sætning:

Sætning

Andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

hvor $a \neq 0$, løses ved at beregne diskriminanten d :

$$d = b^2 - 4ac$$

Hvis

$d < 0$: har ligningen ingen løsninger

$d = 0$: har ligningen én løsning:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

$d > 0$: har ligningen to løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Bevis

Vi starter med andengradsligningen

$$ax^2 + bx + c = 0$$

Og ganger med $4a$ på begge sider af lighedstegnet (det gør man for at koefficienten til x^2 senere kan skrives som et kvadrat). Husk når man løser ligninger, må man ikke gange med 0, men da $a \neq 0$, så kommer vi ikke til det - så alt er godt:

$$4a \cdot (ax^2 + bx + c) = 4a \cdot 0$$

Vi ganger ind i parentesens:

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac = 0$$

Vi får nu den strålende idé at lægge $b^2 - 4ac$ til på begge sider af lighedstegnet (det viser sig at være smart for at man senere kan bruge en omvendt kvadratsætning):

$$4a^2x^2 + 4abx + 4ac + b^2 - 4ac = b^2 - 4ac$$

Vi forkorter ud på venstre side af lighedstegnet og erstatter $b^2 - 4ac$ med d på højre side af lighedstegnet (d kalder vi for diskriminanten):

$$4a^2x^2 + 4abx + b^2 = d$$

Vi kan nu se, at venstreside lugter lidt af første kvadratsætning (som er: $(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$).

Da $(2ax + b)^2 = (2ax)^2 + b^2 + 2 \cdot 2ax \cdot b = 4a^2x^2 + b^2 + 4abx$ kan vi omskrive venstreside i ligningen til:

$$(2ax + b)^2 = d$$

Der er nu tre muligheder:

- 1) Hvis $d < 0$, så har ligningen ingen løsninger (vi kan ikke opløfte noget som helst i anden og få et negativt tal).
- 2) Hvis $d = 0$ har vi:

$$(2ax + b)^2 = 0$$

Det kan kun lade sig gøre, hvis

$$2ax + b = 0$$

Isolerer vi x i denne ligning fås:

$$2ax = -b \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b}{2a}$$

Bemærk, at vi kan dividere med $2a$, fordi $a \neq 0$.

- 3) Hvis $d > 0$ får vi

$$(2ax + b)^2 = d \Leftrightarrow$$

$$2ax + b = \pm\sqrt{d}$$

Vi isolerer x

$$2ax = -b \pm \sqrt{d} \Leftrightarrow$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Alt i alt har vi altså:

- 1) Hvis $d < 0$: har ligningen ingen løsninger
- 2) Hvis $d = 0$: har ligningen én løsning:

$$x = \frac{-b}{2a}$$

3) Hvis $d > 0$: har ligningen to løsninger:

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{d}}{2a}$$

Dette var præcis, hvad vi skulle vise 😊 HURRA!