

# Bevis - faktorisering af andengradspolynomier

Vi vil i denne lille note bevise følgende sætning:

## **Sætning (Faktorisering af andengradspolynomier)**

Andengradspolynomiet  $f(x) = ax^2 + bx + c$  har rødderne  $r_1$  og  $r_2$  hvis og kun hvis

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

Bemærk hvis  $d = 0$ , så er der tale om en dobbeltrod:  $r_1 = r_2 = r$ , og vi får i det tilfælde

$$f(x) = a(x - r)^2$$

## **Bevis**

Vi husker på, at det mærkelige udtryk "hvis og kun hvis" har en meget præcis matematisk betydning og faktisk er en anden skrivemåde for dobbelt-pilen  $\Leftrightarrow$ . Det betyder, at der er to ting, som vi skal vise:

- a) Hvis andengradspolynomiet  $f(x) = ax^2 + bx + c$  har rødderne  $r_1$  og  $r_2$ , så kan vi skrive  $f(x)$  som

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$$

og omvendt:

- b) Hvis funktionen  $f(x)$  kan skrives som  $f(x) = a(x - r_1)(x - r_2)$ , så er  $f(x)$  rent faktisk et andengradspolynomium med rødderne  $r_1$  og  $r_2$ .

## **Beviset for a)**

Vi ved, at  $f(x) = ax^2 + bx + c$  og at  $f$  har rødderne  $r_1$  og  $r_2$ . Det vil sige, at

$$r_1 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a}$$

og

$$r_2 = \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

hvor  $d = b^2 - 4ac$  er diskriminanten.

Vi skal vise, at  $f(x)$  kan faktoreres på denne måde:  $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$ .

Det vil vi gøre ved at regne på  $a(x - r_1)(x - r_2)$  og vise, at det giver det samme som  $f(x) = ax^2 + bx + c$ :

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot (x^2 - r_2 \cdot x - r_1 \cdot x + r_1 \cdot r_2)$$

Sætter vi  $x$  uden for en parentes i de to midterste led får vi

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot (x^2 - (r_1 + r_2) \cdot x + r_1 \cdot r_2)$$

Vi kan se, at  $r_1 + r_2$  og  $r_1 \cdot r_2$  indgår i ovenstående udtryk, så derfor finder vi et udtryk for  $r_1 + r_2$  og  $r_1 \cdot r_2$ :

$$r_1 + r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} + \frac{-b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-b - \sqrt{d} - b + \sqrt{d}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}$$

Altså er

$$r_1 + r_2 = -\frac{b}{a}$$

Og

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{-b - \sqrt{d}}{2a} \cdot \frac{-b + \sqrt{d}}{2a}$$

Husk at man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner:

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{(-b - \sqrt{d}) \cdot (-b + \sqrt{d})}{(2a)^2}$$

Nu bruger vi 3. kvadratsætning i tælleren og får

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{(-b)^2 - (\sqrt{d})^2}{4a^2} = \frac{b^2 - d}{4a^2}$$

Vi bruger nu, at  $d = b^2 - 4ac$ :

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{b^2 - (b^2 - 4ac)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}$$

Det vil sige, at

$$r_1 \cdot r_2 = \frac{c}{a}$$

Udtrykket for  $r_1 + r_2$  og  $r_1 \cdot r_2$  indsættes nu i

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot (x^2 - (r_1 + r_2) \cdot x + r_1 \cdot r_2)$$

Så får vi

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot \left( x^2 - \left( -\frac{b}{a} \right) \cdot x + \frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot \left( x^2 + \frac{b}{a} \cdot x + \frac{c}{a} \right) \Leftrightarrow$$

$$a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot x^2 + a \cdot \frac{b}{a} \cdot x + a \cdot \frac{c}{a} \Leftrightarrow$$

$$a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 + bx + c$$

Altså har vi vist, at  $f(x) = ax^2 + bx + c$  kan faktoriseres, da  $f(x) = ax^2 + bx + c = a(x - r_1)(x - r_2)$ .

### Beviset for b)

Vi ved, at  $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$ .

Vi skal vise, at  $f$  er et andengradspolynomium (dvs. at  $f$  har en forskrift på formen  $f(x) = ax^2 + bx + c$ ) og at  $f$  har rødderne  $r_1$  og  $r_2$  (dvs. at  $f(r_1) = 0$  og  $f(r_2) = 0$ ).

Vi starter med at vise, at hvis  $f(x) = a \cdot (x - r_1) \cdot (x - r_2)$ , så er  $f$  et andengradspolynomium. Fra ovenstående har vi allerede lavet denne omskrivning:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = a \cdot (x^2 - (r_1 + r_2) \cdot x + r_1 \cdot r_2)$$

Vi ganger  $a$  ind i parenteser:

$$f(x) = a(x - r_1)(x - r_2) = ax^2 - a \cdot (r_1 + r_2) \cdot x + a \cdot r_1 \cdot r_2$$

Altså kan forskriften for  $f$  skrives på formen  $f(x) = ax^2 + bx + c$ , hvor

$$b = -a \cdot (r_1 + r_2)$$

og

$$c = a \cdot r_1 \cdot r_2$$

Det vil sige, at  $f$  er et andengradspolynomium. Nu skal vi vise, at  $f$  har rødderne  $r_1$  og  $r_2$ . Da

$$f(r_1) = a \cdot (r_1 - r_1) \cdot (r_1 - r_2) = a \cdot 0 \cdot (r_1 - r_2) = 0$$

og

$$f(r_2) = a \cdot (r_2 - r_1) \cdot (r_2 - r_2) = a \cdot (r_2 - r_1) \cdot 0 = 0$$

Så er  $r_1$  og  $r_2$  rødder. Hermed har vi bevist sætningen.

□