Symmetriakse og toppunkt for parabler

Vi betragter andengradspolynomiet

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \qquad a \neq 0$$

Grafen for f kalder vi som bekendt for en *parabel.* Det viser sig, at denne parabel er symmetrisk omkring en lodret akse:

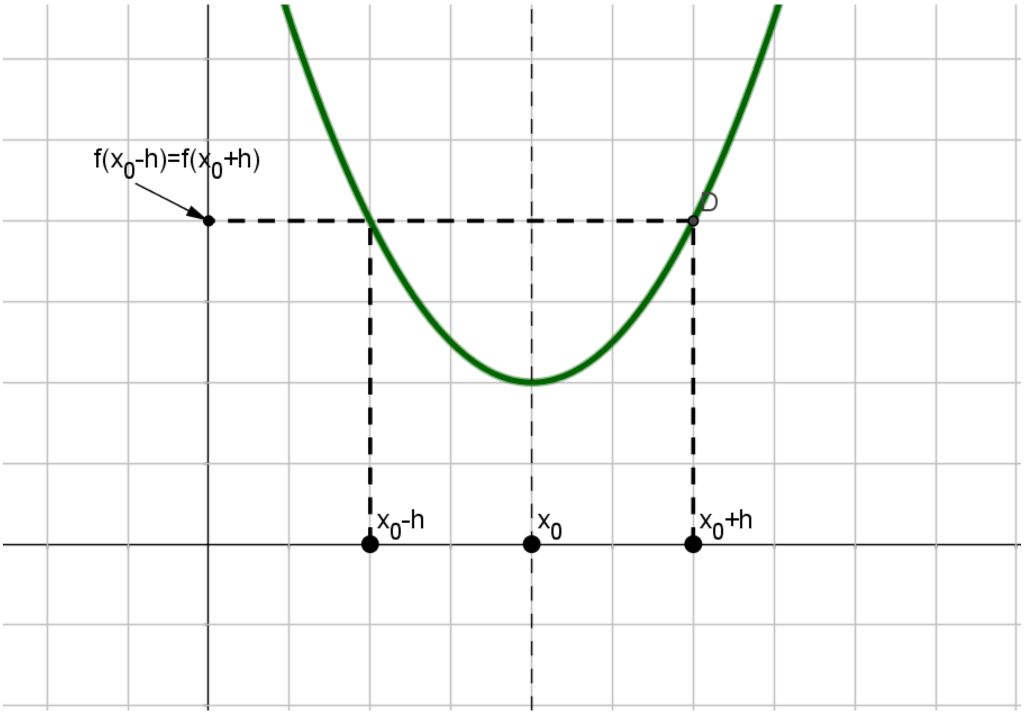
Sætning

Parablen, som er graf for funktion $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ er symmetrisk omkring den lodrette akse med ligning

$$x = -\frac{b}{2a}$$

Bevis

Det skal vi nu bevise! Se på figuren herunder:



En graf er symmetrisk omkring den lodrette linje med ligning$x = x_0$, hvis dette er sådan, at hver gang vi går et skridt til højre på x-aksen (så vi står i $x_0 + h$), så vil funktionsværdien ($f(x_0 + h)$) være den samme, som hvis vi var gået det samme skridt til venstre på x-aksen (så vi står i $x_0 - h$). Det vil sige, at vi leder efter det x_0, som har denne egenskab:

$$f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$$

for alle værdier af h.

Vi antager her, at $h > 0$ for ellers bliver vi jo bare stående i x_0.

Man skal egentlig bare "tage hovedet under armen" og regne 😉 Dvs. vi skal indsætte $x_0 - h$ på x's plads i forskriften for f og tilsvarende med $x_0 + h$. De to udtryk, som I får, skal I sætte lig med hinanden og isolere x_0.

Da $f(x) = ax^2 + bx + c$ så er

$$f(x_0 - h) = a \cdot (x_0 - h)^2 + b \cdot (x_0 - h) + c$$

For at udregne $(x_0 - h)^2$ bruger vi anden kvadratsætning. Så får vi:

$$f(x_0 - h) = a \cdot (x_0^2 + h^2 - 2x_0 h) + b \cdot (x_0 - h) + c$$

Vi ganger nu ind i de to parenteser:

$$f(x_0 - h) = ax_0^2 + ah^2 - 2ax_0 h + bx_0 - bh + c$$

Tilsvarende får vi

$$f(x_0 + h) = a \cdot (x_0 + h)^2 + b \cdot (x_0 + h) + c$$

Og ved at bruge første kvadratsætning kan det omskrives til

$$f(x_0 + h) = a \cdot (x_0^2 + h^2 + 2x_0 h) + b \cdot (x_0 + h) + c$$

Igen ganger vi ind i parenteserne

$$f(x_0 + h) = ax_0^2 + ah^2 + 2ax_0 h + bx_0 + bh + c$$

Vi kan nu løse ligningen $f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$:

$$ax_0^2 + ah^2 - 2ax_0 h + bx_0 - bh + c = ax_0^2 + ah^2 + 2ax_0 h + bx_0 + h + bh + c$$

Der er en hel del led, som forkorter ud:

$$-2ax_0 h - bh = 2ax_0 h + bh \;\Leftrightarrow$$

$$-bh - bh = 2ax_0 h + 2ax_0 h \;\Leftrightarrow$$

$$4ax_0 h = -2bh$$

Vi dividerer nu med $4ah$ (husk at både $a > 0$ og $h > 0$ og derfor kan vi ikke komme til at dividere med 0)

$$\frac{4ax_0h}{4ah} = -\frac{2bh}{4ah} \Leftrightarrow$$

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Læg mærke til at x_0 ikke afhænger af h. Dvs. at uanset hvilket $h > 0$ vi vælger, så gælder der, at

$$f(x_0 - h) = f(x_0 + h)$$

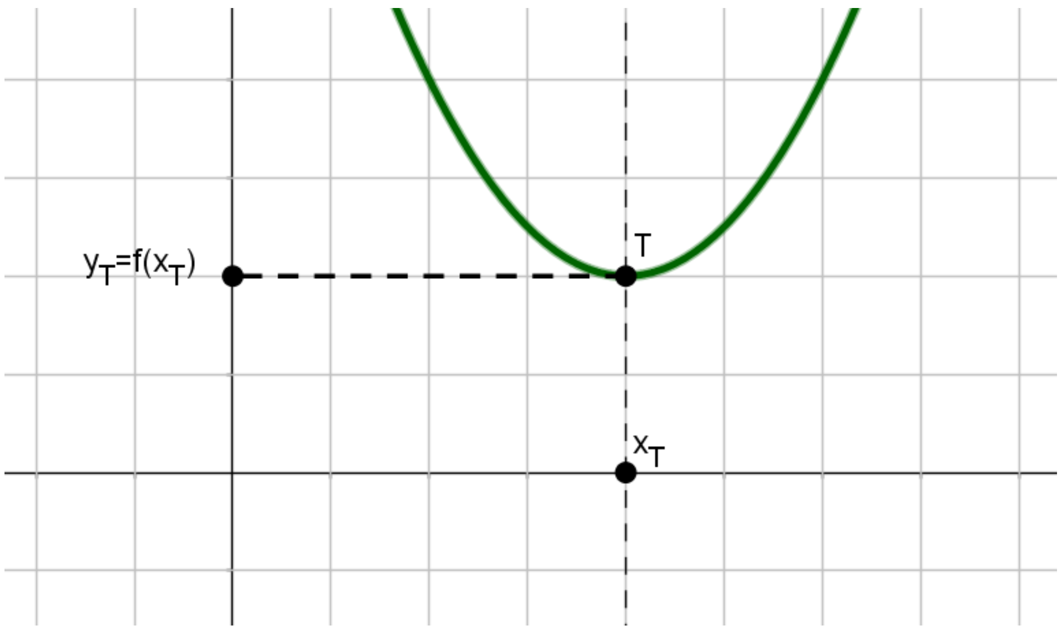
når bare

$$x_0 = -\frac{b}{2a}$$

Det betyder, at parablen er symmetrisk omkring den lodrette linje med ligning $x = -\frac{b}{2a}$, hvilket var det, vi gerne ville vise.

□

Vi har tidligere defineret, at det punkt på parablen, som ligger på symmetriaksen, vil vi kalde for toppunktet T. Se figuren herunder:



Der gælder følgende sætning om toppunktets koordinatsæt:

Sætning

Toppunktet T for den parabel, som er graf for andengradspolynomiet $f(x) = ax^2 + bx + c, a \neq 0$ har koordinatsæt

$$(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

hvor d er diskriminanten ($d = b^2 - 4ac$).

Bevis

Da toppunktet ligger på symmetriaksen, som har ligning $x = -\frac{b}{2a}$, så må toppunktets førstekoordinat være

$$x_T = -\frac{b}{2a}$$

Da toppunktet ligger på grafen for f, må toppunktets andenkoordinat være

$$y_T = f(x_T)$$

Se figuren ovenfor! For at vise det skal vi igen bare "tage hovedet under armen" og regne 😉 :

$$f(x_T) = f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

Da

$$\left(-\frac{b}{2a}\right)^2 = \left(-\frac{b}{2a}\right) \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a^2}$$

fås

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = a \cdot \frac{b^2}{4a^2} + b \cdot \left(-\frac{b}{2a}\right) + c$$

Vi husker, at man ganger et tal med en brøk ved at gange med tallet i tælleren:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{ab^2}{4a^2} + \frac{-b^2}{2a} + c$$

I den første brøk forkorter a ud (og vi skriver lige c som $c/1$):

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-b^2}{2a} + \frac{c}{1}$$

Vi ser nu, at $4a$ er en fællesnævner. Vi forlænger derfor den anden brøk med 2 og den sidste brøk med $4a$:

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2}{4a} + \frac{-2b^2}{4a} + \frac{4ac}{4a} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{b^2 - 2b^2 + 4ac}{4a} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-b^2 + 4ac}{4a} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-(b^2 - 4ac)}{4a} \Leftrightarrow$$

$$f\left(-\frac{b}{2a}\right) = \frac{-d}{4a}$$

Da diskriminanten $d = b^2 - 4ac$.

Altså har vi vist, at toppunktets andenkoordinat er $y_T = \frac{-d}{4a}$ og derfor alt i alt, at toppunktet har koordinatsæt

$$(x_T, y_T) = \left(-\frac{b}{2a}, -\frac{d}{4a}\right)$$

$\square$

OBS! Vi har <u>ikke</u> bevist, at T enten er det man kalder for et *globalt maksimum* (hvis $a < 0$) eller et *globalt minimum* (hvis $a > 0$)! Det må vi vente med til vi skal have differentialregning (jeg <u>ved</u>, at I allerede glæder jer!!)!!