Omvendte funktioner (MAT A1 stx, Systime)

Visse regneoperationer i matematik tænker vi på som hinandens omvendte. F.eks. de to operationer *"sætte i anden"* og "*tage kvadratrod"*, mens *"lægge 5 til"* og *"trække 5 fra"* er et andet eksempel. Det karakteristiske er her, at virkningen af den ene operation bliver ophævet af den anden:

$$1)\ \ 7^2 = 49 \text{ og } \sqrt{49} = 7 \qquad 2)\ \ 7 + 5 = 12 \text{ og } 12 - 5 = 7.$$

I matematik vælger man at se det som funktioner, der er hinandens omvendte:

$$\begin{cases} f(x) = x^2,\ x \geq 0 \\ f^{-1}(x) = \sqrt{x} \end{cases} \quad \text{og} \quad \begin{cases} g(x) = x + 5 \\ g^{-1}(x) = x - 5. \end{cases}$$

Vi benytter her notationen f^{-1} og g^{-1} som betegnelser for de omvendte funktioner til *f* og *g*. At der er tale om funktioner, der "ophæver hinanden", kan man se, når funktionerne sammensættes:

$$f \circ f^{-1}(x) = f(f^{-1}(x)) = f(\sqrt{x}) = \sqrt{x}^2 = x$$
$$g \circ g^{-1}(x) = g(g^{-1}(x)) = g(x - 5) = (x - 5) + 5 = x.$$

Sammensættes funktionerne i den modsatte rækkefølge bliver resultatet det samme:

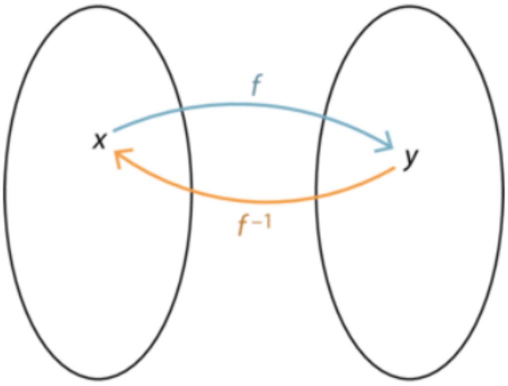
$$f^{-1} \circ f(x) = f^{-1}(f(x)) = \sqrt{f(x)} = \sqrt{x^2} = |x| = x$$
$$g^{-1} \circ g(x) = g^{-1}(g(x)) = g^{-1}(x + 5) = (x + 5) - 5 = x.$$

Definition 8

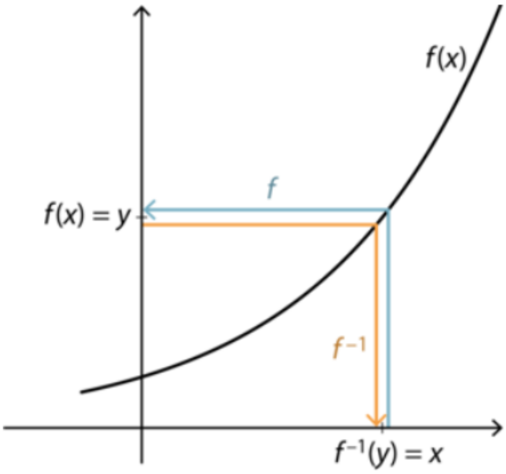
En *omvendt funktion* til f er en funktion f^{-1}, der virker modsat f:

$$f \circ f^{-1}(x) = x \quad \text{og} \quad f^{-1} \circ f(x) = x.$$

På figur 33 og figur 34 er det omvendte forhold mellem f og f^{-1} illustreret.



Figur 33



Figur 34

1.9 Regneforskrift for omvendt funktion

Vi skal finde en metode til at bestemme forskriften for f^{-1}, når vi kender forskiften for f. Vi ser på funktionen f med forskiften $f(x) = 2x - 4$.

Forskriften *foreskriver,* hvordan man for et tal x finder et andet tal y – man ganger x med 2 og trækker 4 fra:

$$y = 2x - 4.$$

Forskriften for f^{-1} skal *foreskrive,* hvordan man fra $y = 2x - 4$ kommer tilbage til x. Det ved vi, hvis vi udtrykker x ved y, dvs. isolerer x i ligningen $y = 2x - 4$.

$$y = 2x - 4 \Leftrightarrow 2x = y + 4 \Leftrightarrow x = \frac{y+4}{2} = \frac{1}{2}y + 2.$$

Man kommer altså tilbage til x ved at gange y med $\frac{1}{2}$ og lægge 2 til. Vi kan også skrive $f^{-1}(y) = \frac{1}{2}y + 2$.

Funktioner er uafhængige af valg af betegnelser for de variable størrelser. Det er den sammen funktion, uanset om man skriver y, z, a eller x som navn på den uafhængige variabel. Vi foretrækker x og får derfor som resultat:

$$f^{-1}(x) = \frac{1}{2}x + 2.$$

Vi opsummerer:

Metode til at bestemme f^{-1}

Man finder forskriften for den omvendte funktion f^{-1} til f, når man

1. isolerer x i ligningen $y = f(x)$:

$$y = f(x) \Leftrightarrow x = f^{-1}(y)$$

2. ombytter x og y:

$$x = f^{-1}(y) \longleftrightarrow y = f^{-1}(x).$$

Selvom den omvendte funktion findes, kan det være svært – i nogle tilfælde endda umuligt – at bestemme forskriften ved hjælp af den nævnte metode.

Problemet er ligningen $y = f(x)$, som for nogle funktioner f kun vanskeligt – eller slet ikke – lader sig løse mht. x. Hvis ligningen ikke kan løses, kan man vælge at definere en helt ny funktion ud fra de egenkaber, den må have som omvendt funktion til f. På den måde defineres logaritmerne log x og ln x i kapitel 3.

Eksempel 17

Vi bestemmer den omvendte funktion til hver af de to funktioner f og g:

$$1)\ \ f(x) = 4x - 6 \quad \text{og} \quad 2)\ \ g(x) = \frac{2x}{x+1}, \quad x \neq -1.$$

Vi isolerer x i ligningen $y = 4x - 6$:

$$y = 4x - 6 \ \Leftrightarrow\ 4x = y + 6 \ \Leftrightarrow\ x = \frac{y+6}{4} = \frac{1}{4}y + \frac{3}{2}.$$

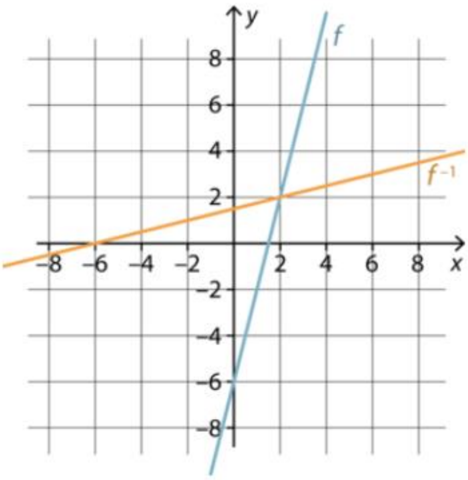
Dvs $f^{-1}(x) = \frac{1}{4}x + \frac{3}{2}$.

Regningerne for den anden funktion er mere besværlige:

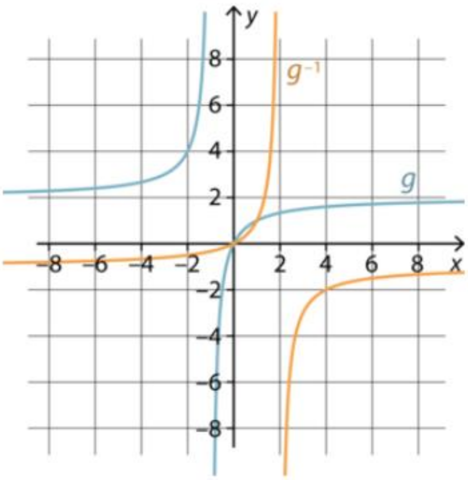
$$\begin{aligned} y = \frac{2x}{x+1} &\Leftrightarrow y(x+1) = 2x \ \Leftrightarrow\ xy + y = 2x \ \Leftrightarrow\ 2x - xy = y \\ &\Leftrightarrow x(2-y) = y \ \Leftrightarrow\ x = \frac{y}{2-y}. \end{aligned}$$

Altså får vi resultatet $g^{-1}(x) = \frac{x}{2-x}, \quad x \neq 2$.

På figur 41 og 42 er graferne tegnet.



Figur 41



Figur 42