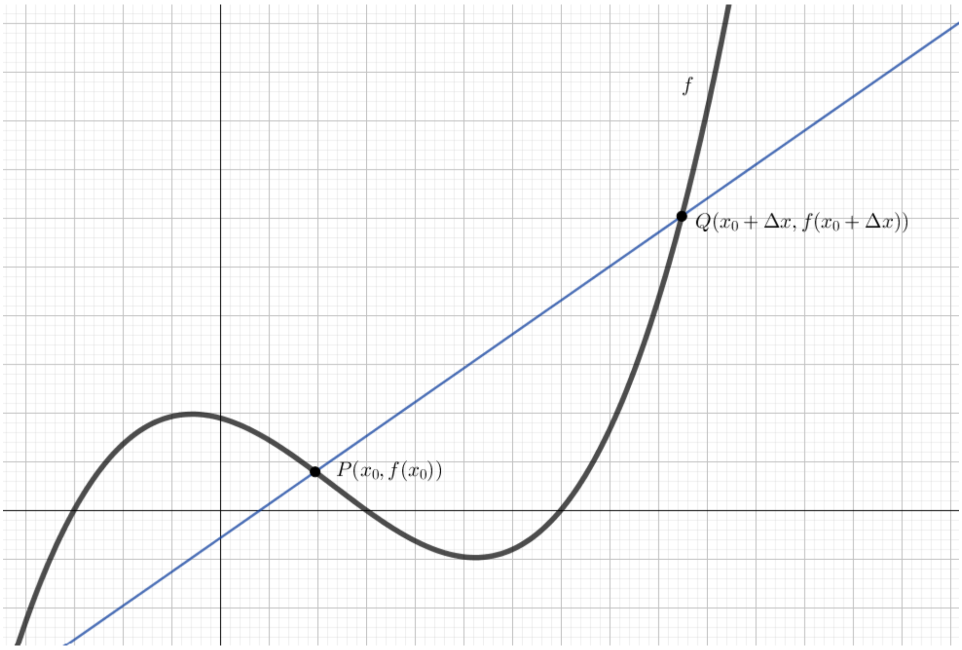
Arbejdsark til diverse differentialkvotienter

Nu går det løs! Vi skal have fundet differentialkvotienterne for en masse sjove funktioner og sammensætninger af funktioner 😊. Til det skal vi bruge tretrinsreglen:

Tretrinsreglen

Vi har en funktion $f(x)$ og vi vil gerne bestemme hældningen af tangenten til grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$.



1) Med udgangspunkt i de to punkter $P(x_0, f(x_0))$ og $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ bestemmes hældningen af sekanten gennem punkterne P og Q:

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(denne brøk kaldes for *differenskvotienten*).

2) Reducér udtrykket for a_s.

3) Hvis differenskvotienten a_s har en grænseværdi for $\Delta x \to 0$, bestemmes det tal, som a_s går mod. Det tal, som sekantens hældning går mod, kaldes for *differentialkvotienten* for f i x_0 og skrives

$$f'(x_0)$$

Man siger, at f er differentiabel i x_0.

Brug nu tretrinsreglen til at bevise nedenstående sætninger.

Udfyld løbende skemaet på side 3.

Sætning 1
Lad $f(x) = k$, hvor k er en konstant, så er $f'(x_0) = 0$.

Overvej hvorfor det giver god mening (tegn grafen for f og indtegn tangenten i et punkt på grafen).

Sætning 2
Lad $f(x) = x$, så er $f'(x_0) = 1$.

Overvej hvorfor det giver god mening (tegn grafen for f og indtegn tangenten i et punkt på grafen).

Sætning 3
Lad $f(x) = ax + b$, så er $f'(x_0) = a$.

Overvej hvorfor det giver god mening (tegn grafen for f og indtegn tangenten i et punkt på grafen).

Sætning 4
Lad $f(x) = x^3$, så er $f'(x_0) = 3x_0^2$.

Sætning 5
Lad $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \neq 0$, så er $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$.

Hint! Du skal have styr på dine brøkregneregler. Du skal finde fællesnævner og du skal kunne dividere en brøk med et tal.

Sætning 6
Lad $f(x) = \sqrt{x}$, $x > 0$, så er $f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$.

Hint! Gang din differenskvotient med $\frac{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0+\Delta x}+\sqrt{x_0}}$ *(øh, hvorfor må du egentlig det?).*

Ekstra

a) Hvis $f(x) = x^n$, hvad mon $f'(x_0)$ så er? Kan du gætte dig til en formel ved at se på resultaterne fra sætning 2 og 4?

b) Måske ved du det ikke, men man har vedtaget, at

$$x^{-1} = \frac{1}{x}$$

Passer dit gæt også i det tilfælde, hvor $n = -1$ (sammenlign med sætning 5)?

c) Måske ved du det ikke, men man har vedtaget, at

$$x^{\frac{1}{2}} = \sqrt{x}$$

Passer dit gæt også i det tilfælde, hvor $n = 1/2$ (sammenlign med sætning 6)?

Udfyld skemaet:

Funktion $f(x)$	Differentialkvotient $f'(x_0)$
k	
x	
$ax + b$	
x^2	
x^3	
$\frac{1}{x}$	
$\sqrt{x}$	
x^n	

Tillægsopgave: Tangentligninger

Opgave

Lad $f(x) = x^3$.

a) Bestem hældningskoefficienten til tangenten til grafen for f i punktet $P(1,1)$.
Hint: Udregn $f'(1)$.

b) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(1,1)$.
Hint: Husk at en ret linje har en ligning på formen $y = ax + b$. Du kender hældningen og kan også finde b, da du ved, at tangenten går igennem $P(1,1)$.

c) Bestem hældningskoefficienten til tangenten til grafen for f i punktet $P(2,8)$.

d) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(2,8)$.

e) Bestem hældningskoefficienten til tangenten til grafen for f i punktet $P(-1, f(-1))$.

f) Bestem en ligning for tangenten til grafen for f i punktet $P(-1, f(-1))$.