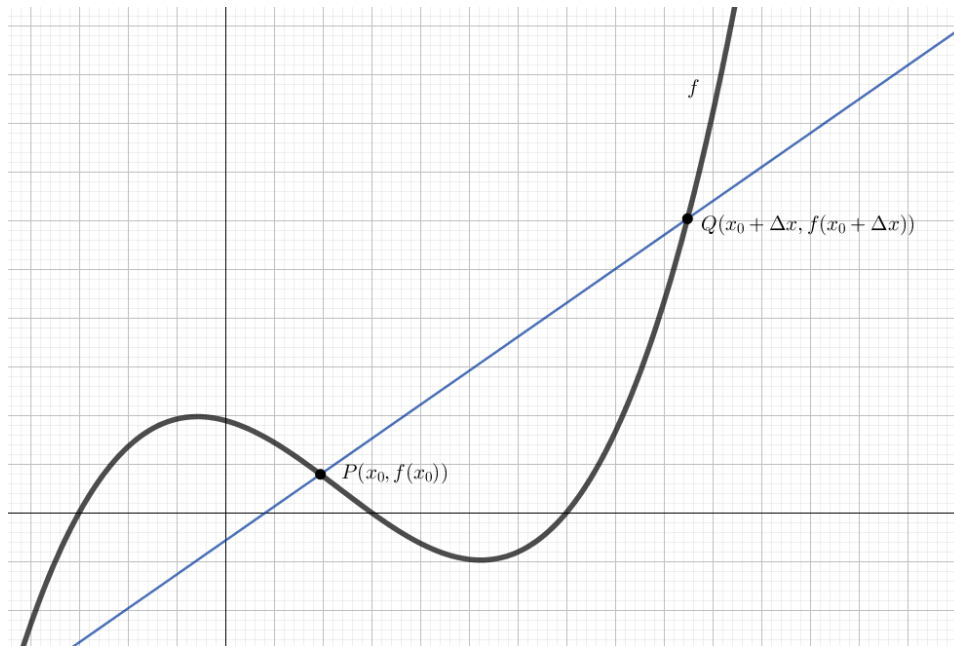


Beviser for diverse differentialkvotienter

Når man skal bevise, hvordan man differentierer forskellige funktioner, skal man bruge tretrinsreglen:

Tretrinsreglen

Vi har en funktion $f(x)$ og vi vil gerne bestemme hældningen af tangenten til grafen for f i punktet $(x_0, f(x_0))$.



- 1) Med udgangspunkt i de to punkter $P(x_0, f(x_0))$ og $Q(x_0 + \Delta x, f(x_0 + \Delta x))$ bestemmes hældningen af sekanten gennem punkterne P og Q :

$$a_s = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}$$

(denne brøk kaldes for *differenskvotienten*).

- 2) Reducér udtrykket for a_s .
- 3) Hvis differenskvotienten a_s har en grænseværdi for $\Delta x \rightarrow 0$, bestemmes det tal, som a_s går mod. Det tal, som sekantens hældning går mod, kaldes for *differentialkvotienten* for f i x_0 og skrives

$$f'(x_0)$$

Man siger, at f er differentiabel i x_0 .

Sætning 1

Lad k være et tal. Så er den konstante funktion

$$f(x) = k, \quad k \in \mathbb{R}$$

differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 0$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{k - k}{\Delta x} = \frac{0}{\Delta x} = 0$$

Da ovenstående udtryk ikke afhænger af Δx vil

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow 0 \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Vi har dermed bevist, at f er differentiable med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 0.$$

□

Sætning 2

Den lineære funktion

$$f(x) = ax + b, \quad x \in \mathbb{R}$$

er differentiable i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = a$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a(x_0 + \Delta x) + b - (ax_0 + b)}{\Delta x} = \frac{ax_0 + a \cdot \Delta x + b - ax_0 - b}{\Delta x} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{a \cdot \Delta x}{\Delta x} = a$$

Da ovenstående udtryk ikke afhænger af Δx , vil

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow a \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0.$$

Vi har dermed bevist, at f er differentiabel med differentialkvotient

$$f'(x_0) = a.$$

□

Sætning 3

Funktionen

$$f(x) = x^2, \quad x \in \mathbb{R}$$

er differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 2x_0$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^2 - x_0^2}{\Delta x} = \frac{x_0^2 + \Delta x^2 + 2x_0\Delta x - x_0^2}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2 + 2x_0\Delta x}{\Delta x}$$

Vi dividerer Δx op i hvert led

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{2x_0\Delta x}{\Delta x} = \Delta x + 2x_0$$

Når Δx går mod 0 vil

$$\Delta x + 2x_0 \rightarrow 2x_0$$

idet $2x_0$ ikke afhænger af Δx (og pga. sætningen på side 107 i A2-bogen). Det vil sige, at

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow 2x_0 \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Vi har således bevist, at f er differentiabel med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 2x_0.$$

□

Sætning 4

Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}, \quad x > 0$$

er differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x}$$

Vi vil nu gange brøken med 1 på en snedig måde. Det er et smart trick for at kunne reducere brøken yderligere. Det viser sig lige om lidt, at det er fikst at gange med 1 skrevet på denne måde:

$$\frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}} = 1$$

Vi husker lige, at man ganger to brøker med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner :o). Vores differentialkvotient bliver så

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}}{\Delta x} \cdot \frac{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}{\Delta x + \sqrt{x_0}} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x} - \sqrt{x_0}) \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$$

I tælleren bruger vi nu 3. kvadratsætning: $(a - b) \cdot (a + b) = a^2 - b^2$ og reducerer

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(\sqrt{x_0 + \Delta x})^2 - (\sqrt{x_0})^2}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} = \frac{x_0 + \Delta x - x_0}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})} \Leftrightarrow$$

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\Delta x}{\Delta x \cdot (\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0})}$$

De to Δx 'ere forkorter nu ud (tænkt evt. på det som, at der står $1 \cdot \Delta x$ i tælleren):

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{1}{\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0}}$$

Vi bruger nu sætningen på side 107 i A2-bogen om at tage grænseværdien af en brøk. Tælleren forbliver uændret, da den ikke afhænger af Δx , mens nævneren går mod følgende, når Δx går mod 0:

$$\sqrt{x_0 + \Delta x} + \sqrt{x_0} \rightarrow \sqrt{x_0} + \sqrt{x_0} = 2\sqrt{x_0}$$

(igen pga. sætningen på side 107 og fordi at kvadratrodsfunktionen er kontinuert). Altså vil

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow \frac{1}{2\sqrt{x_0}} \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Vi har altså bevist, at f er differentiabel med differentialkvotient

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

□

Sætning 5

Funktionen

$$f(x) = x^3, \quad x \in \mathbb{R}$$

er differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 3x_0^2$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{(x_0 + \Delta x)^3 - x_0^3}{\Delta x}$$

Vi starter lige med at omskrive første led i tælleren

$$(x_0 + \Delta x)^3 = (x_0 + \Delta x)(x_0 + \Delta x)^2 = (x_0 + \Delta x)(x_0^2 + \Delta x^2 + 2x_0\Delta x) \Leftrightarrow$$

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + x_0\Delta x^2 + 2x_0^2\Delta x + x_0^2\Delta x + \Delta x^3 + 2x_0\Delta x^2 \Leftrightarrow$$

$$(x_0 + \Delta x)^3 = x_0^3 + 3x_0\Delta x^2 + 3x_0^2\Delta x + \Delta x^3$$

Vi kan nu regne videre på differenskvotienten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{x_0^3 + 3x_0\Delta x^2 + 3x_0^2\Delta x + \Delta x^3 - x_0^3}{\Delta x} = \frac{3x_0\Delta x^2 + 3x_0^2\Delta x + \Delta x^3}{\Delta x}$$

Vi dividerer Δx op i hvert led

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{3x_0\Delta x^2}{\Delta x} + \frac{3x_0^2\Delta x}{\Delta x} + \frac{\Delta x^3}{\Delta x} = 3x_0\Delta x + 3x_0^2 + \Delta x^2$$

Da både $3x_0\Delta x \rightarrow 0$ og $\Delta x^2 \rightarrow 0$, når $\Delta x \rightarrow 0$ kan vi igen vha. sætningen på side 107 slutte at

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow 0 + 3x_0^2 + 0 = 3x_0^2 \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Vi har derfor bevist, at f er differentiabel med differentialkvotient

$$f'(x_0) = 3x_0^2.$$

□

Sætning 6

Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad x > 0$$

er differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten og reducerer:

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0}}{\Delta x}$$

Her bliver det lidt mere overskueligt, hvis vi lige starter med at regne lidt videre på tælleren. Vi sætter på fælles brøkstreg idet fællesnævneren er $(x_0 + \Delta x) \cdot x_0$

$$\frac{1}{x_0 + \Delta x} - \frac{1}{x_0} = \frac{x_0}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0} - \frac{x_0 + \Delta x}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0} = \frac{x_0 - x_0 - \Delta x}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0}$$

Dette udtryk indsætter vi nu i tælleren i differenskvotienten

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{\left(\frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0} \right)}{\Delta x}$$

Husk at man dividerer en brøk med et tal ved at gange med tallet i nævneren

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = \frac{-\Delta x}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0 \cdot \Delta x} = \frac{-1}{(x_0 + \Delta x) \cdot x_0}$$

Vi bruger igen sætningen på side 107 for at bestemme grænseværdien. Da $(x_0 + \Delta x) \cdot x_0 \rightarrow x_0^2$ for $\Delta x \rightarrow 0$ vil

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow -\frac{1}{x_0^2} \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Altså er det bevist, at f er differentiabel med differentialkvotient

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}.$$

□

Sætning 7

Lad f og g være differentiable funktioner, så er funktionen

$$h(x) = f(x) \cdot g(x)$$

også differentiabel i ethvert x_0 med differentialkvotient

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

Bevis

Vi opskriver differenskvotienten:

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x}$$

Det er umiddelbart svært at reducere dette indtryk, men vi får den lysende idé at lægge 0 til på en snedig måde - nemlig ved at lægge

$$-g(x_0 + \Delta x) \cdot f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) \cdot f(x_0)$$

til i tælleren, da dette udtryk er 0:

$$\begin{aligned} \frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} &= \frac{f(x_0 + \Delta x) \cdot g(x_0 + \Delta x) - g(x_0 + \Delta x) \cdot f(x_0) + g(x_0 + \Delta x) \cdot f(x_0) - f(x_0) \cdot g(x_0)}{\Delta x} \end{aligned}$$

I de to første led i tælleren sætter vi nu $g(x_0 + \Delta x)$ uden for en parentes og i de to sidste led sætter vi $f(x_0)$ uden for en parentes. Så får vi

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x) \cdot (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)) + f(x_0) \cdot (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x}$$

Vi deler nu brøken i to:

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = \frac{g(x_0 + \Delta x) \cdot (f(x_0 + \Delta x) - f(x_0))}{\Delta x} + \frac{f(x_0) \cdot (g(x_0 + \Delta x) - g(x_0))}{\Delta x}$$

Herefter udnytter vi brøkreknereglen:

$$\frac{a \cdot b}{c} = a \cdot \frac{b}{c}$$

og får

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} = g(x_0 + \Delta x) \cdot \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} + f(x_0) \cdot \frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x}$$

Vi skal nu finde grænseværdien af ovenstående udtryk, når $\Delta x \rightarrow 0$. Ifølge sætningen om grænseværdier kan vi se på hvert led og faktor for sig.

Da g er differentiabel, ved vi også, at g er kontinuert. Det betyder, at

$$g(x_0 + \Delta x) \rightarrow g(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Desuden ved vi at både f og g er differentiable. Det betyder, at

$$\frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} \rightarrow f'(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

og

$$\frac{g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)}{\Delta x} \rightarrow g'(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Da endelig $f(x_0)$ vil være uændret når $\Delta x \rightarrow 0$, får vi alt i alt, at

$$\frac{h(x_0 + \Delta x) - h(x_0)}{\Delta x} \rightarrow g(x_0) \cdot f'(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0) \quad \text{for} \quad \Delta x \rightarrow 0$$

Altså har vi vist, at h er differentiabel i x_0 med differentialkvotient:

$$h'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$$

□