Den generelle ligning for tangenten

Sætning

Lad f være en differentiabel funktion. Så har tangenten til grafen for f i punktet $\left(x_0, f(x_0)\right)$ ligning

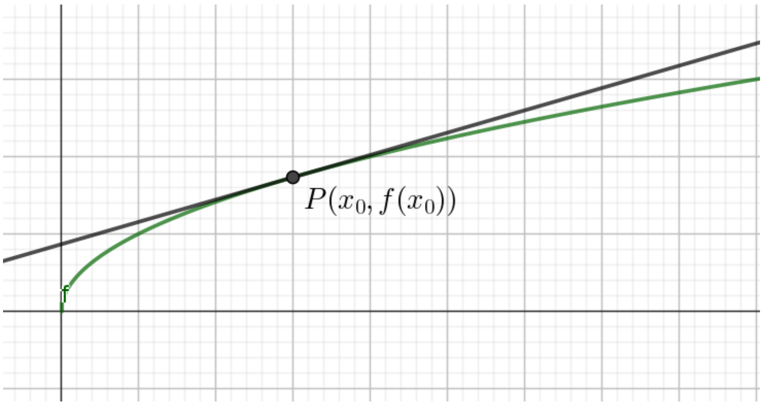
$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Bevis

På figuren ses grafen for en differentiabel funktion f. I punktet $P(x_0, f(x_0))$ er tangenten indtegnet.

Da tangenten er en ret linje, har den en ligning på formen:

$$y = ax + b$$



Nu ved vi, at tangentens hældning a er $f'(x_0)$. Det vil sige, at tangentens ligning kan skrives

$$y = f'(x_0) \cdot x + b \tag{1.1}$$

Da røringspunktet $P(x_0, f(x_0))$ også ligger på tangenten, kan P's koordinater indsættes i tangentens ligning i (1.1) for at finde b:

$$f(x_0) = f'(x_0) \cdot x_0 + b$$

Og isolerer vi b fås

$$b = f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Vi indsætter nu dette udtryk for b på b's plads i ligning (1.1):

$$y = f'(x_0) \cdot x + f(x_0) - f'(x_0) \cdot x_0$$

Bytter vi rundt på de to sidste led får vi:

$$y = f'(x_0) \cdot x - f'(x_0) \cdot x_0 + f(x_0)$$

Nu er $f'(x_0)$ en fælles faktor i de to første led, som kan sættes uden for en parentes:

$$y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$$

Og her ender vi så med tangentens ligning, som var målet. Hurra!

$\square$

<u>Eksempel</u>

Vi vil finde en ligning for tangenten til grafen for $f(x) = x^2$ i punktet med førstekoordinat 3.

Røringspunktets andenkoordinat er:

$$f(3) = 3^2 = 9$$

Vi finder dernæst den afledede funktion:

$$f'(x) = 2x$$

Det vil sige, at tangentens hældning i (3,9) er

$$f'(3) = 2 \cdot 3 = 6$$

Vi indsætter nu i tangentens ligning $y = f'(x_0) \cdot (x - x_0) + f(x_0)$, hvor $x_0 = 3$:

$$y = f'(3) \cdot (x - 3) + f(3)$$

$$y = 6 \cdot (x - 3) + 9$$

$$y = 6x - 18 + 9$$

$$y = 6x - 9$$

Tangentens ligning er altså $y = 6x - 9$. Grafen for f og tangenten i (3,9) ses indtegnet i figuren herunder: