Ekstrema

Eksempel

Vi vil gerne bestemme ekstrema (både lokale og globale) for funktionen

$$f(x) \coloneqq x^3 - x^2 - 6x, \qquad -3 \leq x \leq 4$$

Vi starter med at lave en monotoniundersøgelse. Den afledede funktion har forskrift

$$f'(x) = 3x^2 - 2x - 6$$

Vi bestemmer nu de steder, hvor grafen for f har vandret tangent ved at løse ligningen $f'(x) = 0$:

$$3x^2 - 2x - 6 = 0$$

$\Updownarrow$ *Ligningen løses for x vha. WordMat.*

$$x = -1{,}119633 \quad \vee \quad x = 1{,}7863$$

Det giver os følgende tre monotoniintervaller:

$$[-3; -1{,}12]$$

$$[-1{,}12; 1{,}79]$$

$$[1{,}79; 4]$$

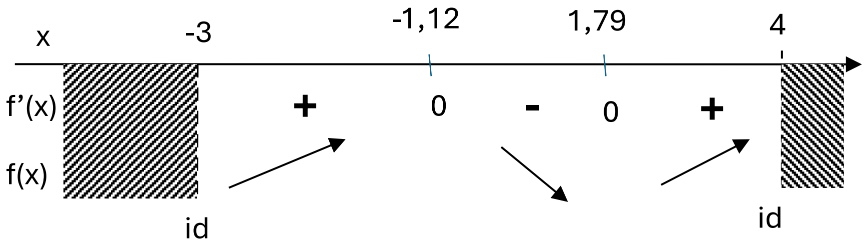
Vi beregner nu differentialkvotienten for en tilfældig værdi i hver af de tre intervaller:

$$f'(-2) = 10$$

$$f'(0) = -6$$

$$f'(2) = 2$$

Vi kan derfor tegne en monotonilinje (selvom den måske ikke er så smuk…):



Der er altså lokalt maksimum i

$$(-1{,}12; f(-1{,}12))$$

og lokalt minimum i

$$(1{,}79; f(1{,}79)).$$

Indtil videre ved vi ikke, om det eventuelt også er globale ekstremaer. Derfor undersøger vi nu funktionsværdien de to steder, hvor tangenten er vandret samt i intervalendepunkterne:

$$f(-3) = -18$$

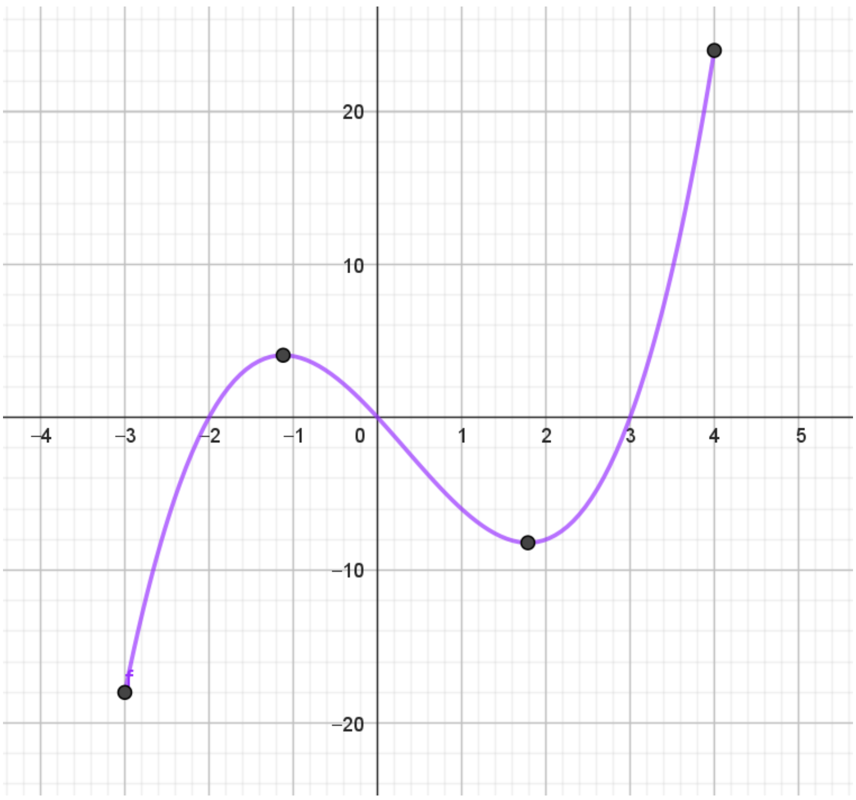
$$f(-1{,}119633) \quad \approx 4{,}060673$$

$$f(1{,}7863) \approx -8{,}208821$$

$$f(4) = 24$$

Altså er der globalt minimum i $(-3, -18)$, lokalt maksimum i $(-1{,}12; 4{,}06)$, lokalt minimum i $(1{,}79; -8{,}21)$ og globalt maksimum i $(4{,}24)$.

Det stemmer også ganske fint overnes med grafen for f, som ses herunder:



Bemærk, at de globale ekstremaer i dette eksempel er i x-værdier, hvor $f'(x) \neq 0$.