

# Integration ved substitution

Desværre findes der ikke en generel produktregel, hvis man skal integrere et produkt. Det vil sige, at der findes ingen generel regel for integraler på formen:

$$\int f(x) \cdot g(x) dx$$

Alligevel kan man nogle gange være heldig og integrere et produkt. Det gælder blandt andet, hvis integralet er på denne form:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx$$

Hvis det er tilfældet, kan vi bruge integration ved substitution:

## **Sætning**

Lad  $f$  være en kontinuert funktion og lad  $g$  være differentiabel med kontinuert afledede  $g'$ , så er

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx = F(g(x)) + k,$$

hvor  $F$  er en stamfunktion til  $f$  og  $k$  er en konstant.

## **Bevis**

Vi differentierer  $F(g(x)) + k$ :

$$(F(g(x)) + k)' = (F(g(x)))' + k' = F'(g(x)) \cdot g'(x) + 0 = f(g(x)) \cdot g'(x).$$

Første lighedstegn følger fordi vi kan differentiere ledvist. Andet lighedstegn fordi  $F(g(x))$  skal differentieres som en sammensat funktion. Og endelig følger det sidste lighedstegn, fordi  $F$  er en stamfunktion til  $f$ . Da  $(F(g(x)) + k)' = f(g(x)) \cdot g'(x)$ , er  $F(g(x))$  altså en stamfunktion til  $f(g(x)) \cdot g'(x)$ .

□

Som vi har talt om, kan man bruge en smart notation, når man har brug for at lave integration ved substitution. Det går ud på, at man spotter, hvad der kan spille rollen, som den indre funktion  $g$ . Så sætter man:

$$t = g(x)$$

Herefter differentierer vi  $g$ :

$$\frac{dt}{dx} = g'(x)$$

Nu er differentialkvotienten  $dt/dx$  ikke en rigtig brøk, men vi lader alligevel som om og misbruger notationen (lige om lidt skal vi se, at det går godt):

$$dt = g'(x)dx$$

I udtrykket  $\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx$  kan vi nu erstatte  $g(x)$  med  $t$  og  $g'(x)dx$  med  $dt$  (man siger, at man laver en *substitution*):

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt$$

Da  $F$  er en stamfunktion til  $f$  får vi:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + k$$

Vi substituerer nu tilbage og erstatter  $t$  med  $g(x)$ :

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x)dx = \int f(t)dt = F(t) + k = F(g(x)) + k$$

Vi kan altså se, at vi ender med det samme som i sætningen. Bemærk, at ovenstående ikke er noget bevis. Det viser bare, at den misbrug af notation, som vi har gjort brug af, alligevel gør, at vi ender med det rigtige.

### **Eksempel**

Vi vil gerne bestemme

$$\int \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x} dx$$

Hvis vi bruger brøkgeregningen  $\frac{a}{b} = \frac{1}{b} \cdot a$  kan vi omskrive integralet til:

$$\int \frac{3x^2 + 4}{x^3 + 4x} dx = \int \frac{1}{x^3 + 4x} \cdot (3x^2 + 4) dx$$

Vi sætter nu

$$t = x^3 + 4x$$

Og får så

$$\frac{dt}{dx} = 3x^2 + 4$$

Det vil sige, at

$$dt = 3x^2 + 4 dx$$

Vi laver nu substitutionen:

$$\int \frac{1}{x^3 + 4x} \cdot (3x^2 + 4) dx = \int \frac{1}{t} dt$$

Hele idéen er her, at integralet på højre side er meget nemmere at finde en stamfunktion til end integralet på venstre side:

$$\int \frac{1}{x^3 + 4x} (3x^2 + 4) dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + k$$

Vi substituerer nu tilbage og erstatter  $t$  med  $x^3 + 4x$  og får:

$$\int \frac{1}{x^3 + 4x} (3x^2 + 4) dx = \int \frac{1}{t} dt = \ln(|t|) + k = \ln(|x^3 + 4x|) + k$$

Hermed er integralet bestemt.

Bemærk at hele idéen er, at lave en substitution så man ender med et integral, som er nemmere at bestemme end det oprindelige. Når man så har fundet stamfunktionen, så laver man en substitution tilbage, så man ender med at have bestemt det oprindelige integral.