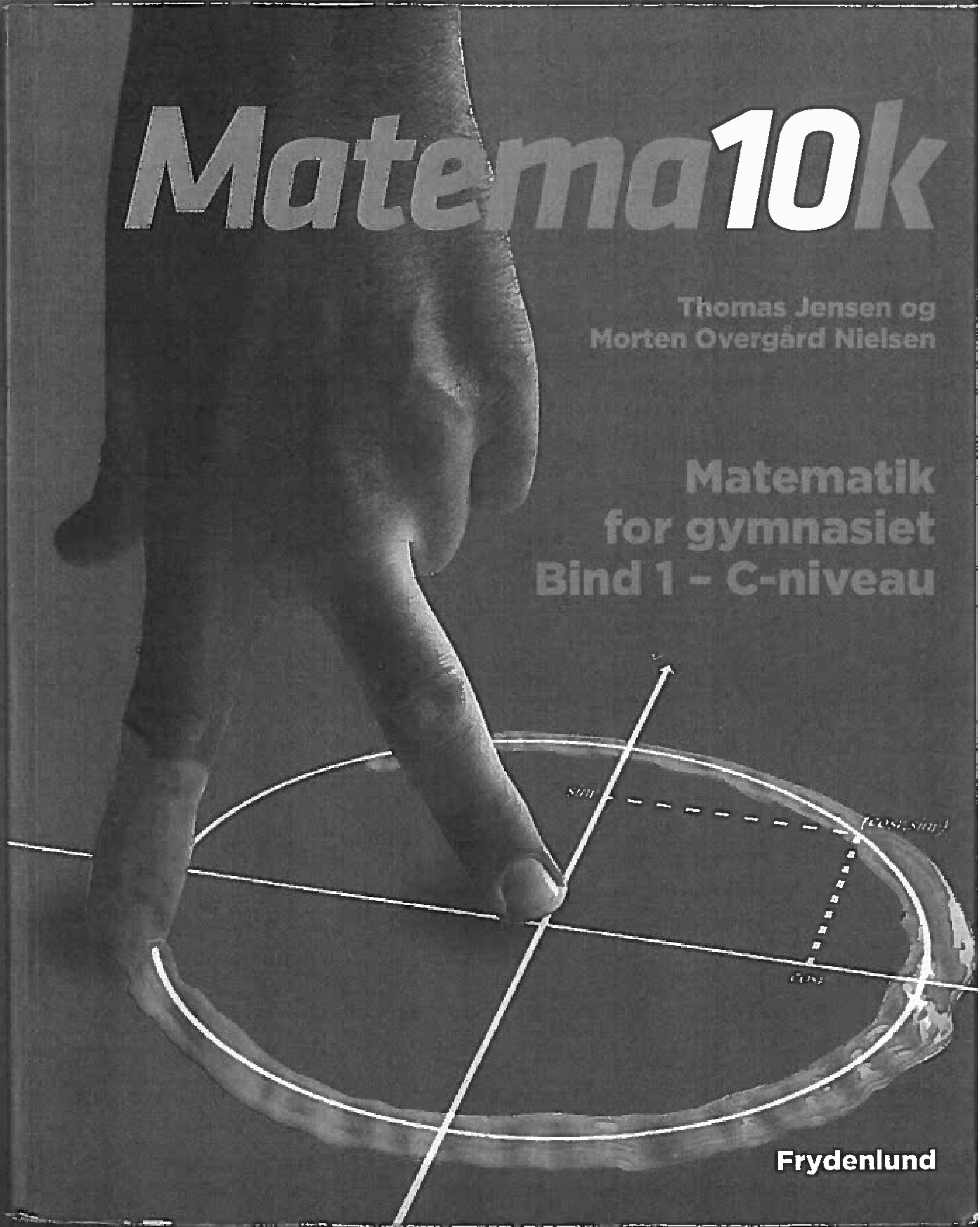
Matema10k

Thomas Jensen og
Morten Overgård Nielsen

Matematik
for gymnasiet
Bind 1 – C-niveau



Frydenlund

s 48

Kort om rødder og potenser

Vi kan udregne:

$$4^2 = 16 \text{ og } \sqrt{16} = 4$$
$$5^2 = 25 \text{ og } \sqrt{25} = 5$$

Egentlig burde vi skrive kvadratroden som »den anden rod af«, f.eks. $\sqrt[2]{16}$, men det er der ingen tradition for. Vi kan se at når vi »sætter noget i anden potens«, så er det så at sige det modsatte af at uddrage kvadratroden (når vi ikke inddrager negative tal).

Dette princip kan vi udvide så vi f.eks. kan udregne:
$$4^3 = 4 \cdot 4 \cdot 4 = 64 \text{ og } \sqrt[3]{64} = 4$$
hvor man læser $\sqrt[3]{64}$ som »den tredje rod af 64«.
$$5^4 = 5 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 5 = 625 \text{ og } \sqrt[4]{625} = 5$$
Her læser man $\sqrt[4]{625}$ som »den fjerde rod af 625«.
Du kan evt. læse mere om potensregning i rammerne s. 160 og 162.

Procentændring fra kort til lang periode - og omvendt

Man kan få behov for at skulle sammenligne renter. Det kan være at man for et lån har en årlig rente på 13,2% som man ønsker at sammenligne med et lånetilbud hvor man skal betale 1,1% pr. måned i rente (og der er rentetilskrivning hver måned). Vi vil nu omregne den månedlige rente på 1,1% til en årlig rente så vi kan sammenligne renterne.

Vi omregner på følgende måde:

Fra månedlig til årlig rente:
Med en månedlig rente på 1,1% får vi den månedlige fremskrivningsfaktor til:

$$F_{måned} = 1 + \frac{1,1}{100} = 1 + 0,011 = 1,011$$

Vi vil nu udregne den årlige fremskrivningsfaktor. Dette kræver at vi ganger den månedlige fremskrivningsfaktor med sig selv 12 gange (læs evt. rammen s. 48). Derfor får vi:

$$F_{år} = (F_{måned})^{12} = (1,011)^{12} = 1,140$$

Vi skal nu finde den årlige procentændring, dvs. den årlige rente:

$$\text{Procentændring} = F_{år} - 1 = 1,140 - 1 = 0,140 = 14,0\%$$

Dermed er renten på dette lånetilbud højere end de 13,2%.

Fra årlig til månedlig rente:
Hvis vi har en årlig rente på 10%, kan vi udregne den månedlige rente (pas dog på når begrebet »pålydende rente« anvendes - læs evt. mere på bogens hjemmeside). Vi finder først den årlige fremskrivningsfaktor:

$$F_{år} = 1 + \frac{10}{100} = 1 + 0,1 = 1,1$$

Vi skal dernæst finde den månedlige fremskrivningsfaktor. Vi skal finde det tal der ganget med sig selv 12 gange, giver 1,1. Dette gør vi ved at uddrage den 12. rod af 1,1:

$$F_{måned} = \sqrt[12]{F_{år}} = \sqrt[12]{1,1} = 1,008$$

Vi kan herefter få renten, dvs. procentændringen:

$$r_{måned} = F_{måned} - 1 = 1,008 - 1 = 0,8\%$$

Harmonikamodellen

Når vi går fra f.eks. en månedlig rente til en årlig rente, går vi fra kort tidsperiode til længere tidsperiode – vi trækker harmonikaen ud.

Når vi går fra f.eks. en årlig rente til en månedlig rente, går vi fra længere tidsperiode til kortere tidsperiode – vi presser harmonikaen sammen.

Sådan anvender man harmonikamodellen:

Betegnelser

- Månedlig rente: $r_{måned}$
- Kvartalsvis rente: $r_{kvartal}$
- Årlig rente: $r_{år}$

Fra månedlig rente til årlig rente

$$r_{år} = (F_{måned})^{12} - 1$$

Fra årlig rente til månedlig rente

$$r_{måned} = \sqrt[12]{F_{år}} - 1$$

Fra kvartalsvis rente til årlig rente

$$r_{år} = (F_{kvartal})^4 - 1$$

Fra årlig rente til kvartalsvis rente

$$r_{kvartal} = \sqrt[4]{F_{år}} - 1$$

Vi kan også anvende harmonikamodellen i følgende eksempler:

Eksempel 1

En størrelse vokser med 10% om året. Hvor mange procent vokser den på 7 år?

Vi udregner den årlige fremskrivningsfaktor til:

$$F_{år} = 1 + 0,10 = 1,10$$

Over 7 år bliver fremskrivningsfaktoren:

$$F_{7\,år} = 1,10^7 = 1,949 \text{ (afrundet værdi)}$$

Vi kan nu udregne procentændringen:

$$\text{Procentændring} = 1,949 - 1 = 0,949 = 94,9\%$$

Eksempel 2

Prisen på sodavand steg fra 1990 til 2000 med 44,4%. Hvad var den gennemsnitlige årlige procentstigning?

Vi udregner fremskrivningsfaktoren over de 10 år:

$$F_{10\,år} = 1 + 0,444 = 1,444$$

Vi udregner så den gennemsnitlige årlige fremskrivningsfaktor:

$$F_{1\,år} = \sqrt[10]{1,444} = 1,037 \text{ (afrundet værdi)}$$

Vi kan herefter udregne den gennemsnitlige årlige procentændring:

$$\text{Procentændring} = 1,037 - 1 = 0,037 = 3,7\%$$

Gennemsnitlig procentvis ændring – forskellige procenter

Situationen bliver en smule anderledes hvis procentvæksten er forskellig fra f.eks. år til år. Vi vil her forklare situationen ud fra et eksempel hvor vi ser på antallet af store privatbiler over 1 100 kg i Danmark. Vi betragter udviklingen i 4 år:

Første år:	en stigning på 19%
Andet år:	en stigning på 21%
Tredje år:	en stigning på 16%
Fjerde år:	en stigning på 7%

Vi ønsker nu at udregne den gennemsnitlige årlige procentvise stigning. Først finder vi fremskrivningsfaktorerne for hvert år:

Første år: $1 + \frac{19}{100} = 1,19$

Andet år: $1 + \frac{21}{100} = 1,21$

Tredje år: $1 + \frac{16}{100} = 1,16$

Fjerde år: $1 + \frac{7}{100} = 1,07$

Vi kan herefter finde fremskrivningsfaktoren for alle fire år:

$$F_{4\,år} = 1,19 \cdot 1,21 \cdot 1,16 \cdot 1,07$$

For at få et endeligt resultat der er så præcist som muligt, venter vi her med at udregne fremskrivningsfaktoren over de fire år. I stedet går vi videre med at finde den gennemsnitlige årlige fremskrivningsfaktor. Her kan vi anvende vores harmonikamodel idet vi går fra 4 år til 1 år, og vi får:

$$F_{4\,år} = \sqrt[4]{1,19 \cdot 1,21 \cdot 1,16 \cdot 1,07} = 1,156$$

$$\text{Procentændring} = F_{år} - 1 = 1,156 - 1 = 15,6\%$$

Altså er den gennemsnitlige årlige procentvise stigning 15,6%.

Hvis vi skal formulere en formel ud fra eksemplet, bliver den noget vanskelig at læse. Vi forsøger alligevel:
Formlen bygger på at vi har n terminer, f.eks. år. Til hver termin har vi en fremskrivningsfaktor, f.eks. F_1 til det første år, F_5 til det femte år og F_n til det n'te år. Formlen er da:

$$\text{Gennemsnitlig procentændring pr. termin} = \sqrt[n]{F_1 \cdot F_2 \cdot F_3 \cdot \ldots \cdot F_n}$$

Hvis der f.eks. går 6 år, bliver det den sjette rod, og man ganger de seks fremskrivningsfaktorer med hinanden.

Indekstal

Som nævnt er procentberegning særdeles anvendelig når man skal sammenligne ændringer. I statistikker anvender man imidlertid ofte et andet begreb når man ønsker at sammenligne udviklinger over nogle år. Dette begreb er indekstal.

Lad os betragte et eksempel hvor vi ønsker at sammenligne udviklingen i priserne på nogle dagligvarer i perioden 1905-1995:

Priser på udvalgte varer i kr.

	1905	1940	1970	1995
Rugbrød (1 kg)	0,13 kr.	0,23 kr.	1,40 kr.	8,85 kr.
Kaffe (1/2 kg)	1,14 kr.	2,34 kr.	12,14 kr.	29,55 kr.
Smør (250 g)	0,50 kr.	0,87 kr.	3,05 kr.	9,63 kr.
Sødmælk (1 l)	0,14 kr.	0,39 kr.	1,25 kr.	5,80 kr.
Kartofler (2 kg)	0,13 kr.	0,45 kr.	2,94 kr.	12,60 kr.

Kilde: Danmarks Statistik

Hvis vi nu ønsker at kunne sammenligne udviklingen i priserne for de fem udvalgte varer, er det imidlertid vanskeligt ud fra priserne. Derfor omregner vi til *indekstal.*

Første trin i beregningen er at vælge hvilket år vi vil tage udgangspunkt i. Dette år betegner vi som *basisåret.* I dette tilfælde vælger vi 1905 som basisår.

Vi definerer herefter indekstal på følgende måde:

$$\text{Indekstal for bestemt år} = \frac{\text{årets værdi}}{\text{basisårets værdi}} \cdot 100$$

Fordi vi vælger 1905 som basisår for alle fem varer, får alle varerne værdien 100 i 1905. Vi kan derfor ikke længere se de konkrete priser, men vi kan sammenligne prisudviklingen fra 1905 til 1995.

Vi udregner f.eks. indekstallet for rugbrød for 1940:

$$\frac{0,23}{0,13} \cdot 100 = 176,9$$

Indekstallet for kartofler i 1995 bliver:

$$\frac{12,60}{0,13} \cdot 100 = 9\,692,3$$

Med samtlige priser omregnet til indekstal får vi følgende tabel:

Indekstal for udvalgte varer (basisår 1905)

	1905	1940	1970	1995
Rugbrød (1 kg)	100	176,9	1 076,9	6 807,7
Kaffe (1/2 kg)	100	205,3	1 064,9	2 592,1
Smør (250 g)	100	174,0	610,0	1 926,0
Sødmælk (1 l)	100	278,6	892,9	4 142,9
Kartofler (2 kg)	100	346,2	2 261,5	9 692,3

Nu er vi i stand til at sammenligne varernes prisudvikling, og vi kan bemærke at kartofler er den vare af de fem der er steget mest, mens smørret er steget mindst.

Hvis vi af indekstallene ønsker at udregne procentstigninger, kan vi gøre det vha. formlen

$$F = \frac{\text{Slutværdi}}{\text{Begyndelsesværdi}} = \frac{S}{B}$$

Vi kan f.eks. udregne procentstigningen i prisen på rugbrød fra 1970 til 1995 ved først at udregne fremskrivningsfaktoren:

$$F = \frac{6\,807,7}{1076,9} = 6,322$$

Vi kan nu ved hjælp af strudsemodellen udregne procentstigningen:

Procentstigning = 6,322 − 1 = 5,322 = 532,2%

Opgaver i procent og rente

1 Udregn hvad 16% af 25389 giver.

2 Hvor mange procent udgør 237 ud af 2987?

3 Prisen på en vare stiger fra 3 499 kr. til 3 999 kr.
- Med hvor mange procent stiger prisen?

4 Jørgen Jørgensen skal betale 43% i skat af en indkomst på 358 000 kr.
- Hvor stort et beløb skal han betale i skat?

5 Ulla Jørgensen har betalt 214 578 kr. i skat af en indkomst på 528 398 kr.
- Hvor stor procentdel af indkomsten har hun betalt i skat?

6 Ved et folketingsvalg stemte 867 350 personer på Socialdemokraterne. I alt stemte 3 357 215 personer ved valget.
- Hvor mange procent stemte på Socialdemokraterne?

7 Partiet Venstre fik 52 mandater ved valget til Folketinget i februar 2005. I Folketinget er i alt 179 medlemmer.
- Hvor stor en procentdel af Folketingets medlemmer udgjorde Venstre?

8 **Opgave i træning af forskellen mellem procent og procentpoint**
- I 1984 udgjorde kvinder 26,9% af Folketingets medlemmer. I 2005 udgjorde kvinder 36% af Folketingets medlemmer.
- Hvor mange procentpoint er andelen af kvinder i Folketinget steget fra 1984 til 2005?
- Hvor mange procent er andelen af kvinder i

9 **Opgave i træning af forskellen mellem procent og procentpoint**
- Kommuneskatten i en kommune stiger fra 31% til 35%.
- Hvor mange procentpoint stiger skatten?
- Hvor mange procent stiger skatten?

10 Avisen Politiken vil højst have 400 ord i et debatindlæg. Søren Sørensen har skrevet et debatindlæg der indeholder 428 ord.
- Med hvor mange procent har han overskredet grænsen på de 400 ord?

11 En strikket trøje koster 689 kr. før udsalg. På udsalg er alle varer i butikken nedsat med 15%.
- Hvad er trøjens udsalgspris?

12 En kunde tilbydes 10% rabat gennem en indkøbsordning. Da hun kommer ned i butikken, er der tilfældigvis »månedens salg« hvor der er 20% rabat på alle varer i butikken.
- Gør rede for at det er ligegyldigt om kunden først får trukket de 10% og derefter de 20% – eller omvendt.
- Hvor mange procent er kundens samlede rabat?

13 To stole koster henholdsvis 2 597 kr. og 3 495 kr.
- Hvor mange procent dyrere er stolen til 3 495 kr. i forhold til stolen til 2 597 kr.?

14 En skatteyder får udregnet at han skal betale 37% i skat af hans indkomst på 314 000 kr.
- Hvor meget skal skatteyderen betale i skat?

15
-
16
-
1

15 Befolkningstallet i Københavns Kommune faldt fra 768 105 i 1950 til 721 381 i 1960.

- Med hvor mange procent faldt befolkningstallet?

16 Antallet af enlige kvinder uden børn i Danmark steg fra 591 237 i 1991 til 608 402 i 2000.

- Beregn procentstigningen.

17 Befolkningstallet i Københavns Kommune steg fra 400 575 i 1901 til 453 576 i 1910.

- Med hvor mange procent steg befolkningstallet fra 1901 til 1910?
- Beregn den gennemsnitlige årlige stigning i procent over disse 9 år.

18 Antallet af elever i de almengymnasiale uddannelser (gymnasiet og hf) faldt fra 24 081 i 1991 til 19 538 i 2003.

- Med hvor mange procent faldt antallet af elever i de almengymnasiale uddannelser fra 1991 til 2003?
- Beregn det gennemsnitlige årlige fald i procent over disse 12 år.

19 Antallet af elever på htx steg fra 948 i 1991 til 2 091 i 2003.

- Med hvor mange procent steg antallet af elever på htx fra 1991 til 2003?
- Beregn den gennemsnitlige årlige stigning i procent over disse 12 år.

20 Salget af slik og chokolade steg med 30% fra 1992 til 2001.

- Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

21 I en kommune stiger befolkningstallet på følgende måde:

1. år: 3,2%
2. år: 5,7%
3. år: 1,1%
4. år: 3,0%

- Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

22 Antallet af politiets registrerede færdselsuheld med personskade hvor føreren var spirituspåvirket, kan aflæses af følgende tabel:

Antal spiritusuheld med personskade	1 230	1 189	1 140

Kilde: Danmarks Statistikbank

- Udregn indekstallene for 2002 og 2003 når 2001 er basisår.

23 Følgende tabel viser antallet af nyregistrerede biler 1992-2004:

1992	84 518
1993	82 007
1994	138 973
1995	135 245
1996	168 105
1997	152 869
1998	162 708
1999	144 259
2000	113 634
2001	96 114
2002	111 598
2003	96 502
2004	122 538

Kilde: Danmarks Statistikbank

- Udregn indekstal med 1992 som basisår.
- Udregn dernæst indekstal med 2000 som basisår.

39 En bank reklamerer med lån til en årlig rente på 12%.

- Hvad er den effektive kvartalsvise rente?

Vanskeligere opgaver

40 Et beløb sættes i banken på en konto med en fast årlig rente. Over 8 år vokser beløbet samlet med 17,54%, og efter 14 år står der 73 291 kr.

- Hvilket beløb blev sat i banken?

41 En størrelse vokser med 3% om året i 5 år hvorefter den vokser med 5% om året i de efterfølgende 2 år.

- Beregn hvor mange procent størrelsen er vokset med over de 7 år.
- Beregn den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

42 En størrelse vokser i 6 år på følgende måde:

Første år: 12%
Andet år: 23%
Tredje år: 4%
Fjerde år: 4%
Femte år: 9%
Sjette år: 2%

Efter 7 år er den årlige gennemsnitlige procentvise stigning 7,62%.

- Beregn den procentvise stigning i det syvende år.

43 En størrelse vokser fra 781 til 5 526 med en årlig procentstigning på 15%.

- Hvor mange år er der gået?

44 Eva sætter 39 200 kr. ind på en opsparing hvor hun får en fast rente på 4,1% om året. Hun hæver 51 932,73 kr.

- Hvor mange år er der gået siden hun satte pengene i banken?

45 Antallet af elever i grundskolens 8., 9. og 10. klasse steg fra 75 919 i 1991 til 81 987 i 2003.

- Bestem den gennemsnitlige årlige procentvise stigning.

  Det forudsættes at denne gennemsnitlige årlige procentvise stigning var gældende fra 1985.

- Bestem under denne forudsætning antallet af elever i grundskolens 8., 9. og 10. klasse i 1985.

46 I 1987 blev der indført 22 L ren alkohol pr. indbygger i Grønland. I 2001 var indførslen faldet til 9,3 L ren alkohol pr. person.

- Beregn med 2 decimaler det gennemsnitlige årlige procentvise fald i indførslen af ren alkohol pr. person i perioden 1987-2001.

  I det følgende antages at dette årlige procentvise fald i indførslen af ren alkohol pr. person fortsætter uændret efter 2001.

- Hvor mange liter ren alkohol pr. person vil der blive indført i 2010?
- I hvilket år vil indførslen af ren alkohol pr. person komme under 4,0 L?
- Hvor lang tid går der før indførslen af ren alkohol pr. person er halveret?

(Eksamensopgave hf fællesfag maj 2003)