Bestemt integration (fra "Lærebog i matematik A3 stx")

Definition 1.5.1 (Det bestemte integral)

Antag, at f er kontinuert på intervallet I, og at $a, b \in I$.

Det bestemte integral fra a til b definerer vi som

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a)$$

hvor F er en stamfunktion til f.

Tallene a og b kalder vi *grænserne*, a kalder vi *nedre grænse* og b den *øvre grænse*. Bemærk, at vi ikke forudsætter noget om, hvilket af tallene a og b der er størst.

I modsætning til det ubestemte integral er det bestemte integral et *tal*, og dette tal afhænger ikke af integrationskonstanten k for den valgte stamfunktion. Da vi nemlig kan skrive enhver stamfunktion til f som

$$G(x) = F(x) + k$$

så er

$$\begin{aligned} G(b) - G(a) &= F(b) + k - (F(a) + k) \\ &= F(b) + k - F(a) - k \\ &= F(b) - F(a) \end{aligned}$$

Vi får altså den samme værdi for det bestemte integral uanset valget af k.

Når vi skal udregne et bestemt integral, bestemmer vi først en stamfunktion $F(x)$ til $f(x)$, og dernæst angiver vi stamfunktionen i kantede parenteser sammen med grænserne

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Eksempel 1.5.1

$$\begin{aligned}\int_1^5 (2x-3)\,\mathrm{d}x &= \left[x^2 - 3x\right]_1^5 \\ &= 5^2 - 3\cdot 5 - (1^2 - 3\cdot 1) \\ &= 10 - (-2) = 12\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_0^{-\pi} \sin(x)\,\mathrm{d}x &= [-\cos(x)]_0^{-\pi} \\ &= -\cos(-\pi) - (-\cos(0)) \\ &= 1 + 1 = 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\int_{-2}^{-1} \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x &= [\ln(|x|)]_{-2}^{-1} \\ &= \ln(1) - \ln(2) = -\ln(2)\end{aligned}$$