Bestemt integration ved substitution

Fra: ”MAT A3 stx”, Systime

Metode 1. Grænserne forbliver uændrede

Vi vil bestemme integralet

$$\int_0^{\pi} 4 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right)\, dx.$$

Først bestemmes det ubestemte integral $\int 4\cos\left(\frac{1}{2}x\right) dx$ ved substitution. Vi sætter $t = \frac{1}{2}x$ og får, at $dx = 2dt$:

$$\int 4\cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx = \int 4\cos t \cdot 2dt = \int 8\cos t\ dt = 8\sin t + k = 8\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right) + k.$$

Den fundne stamfunktion bruges til at bestemme det bestemte integral:

$$\int_0^{\pi} 4 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx = \left[8\sin\left(\tfrac{1}{2}x\right)\right]_0^{\pi} = 8\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 8\sin 0 = 8.$$

Metode 2. Der indføres nye integrationsgrænser undervejs

I stedet for til sidst i processen at skulle substituere *t* med et *x*-udtryk, kan man også bevare *t* som variabel. Det kræver dog, at man – som vist i sætning 4 – undervejs justerer integralets grænser, så de passer til *t* som integrationsvariabel.

Vi benytter igen substitutionen $t = \frac{1}{2}x$.

For den nedre grænse $a = 0$ er $t(0) = \frac{1}{2} \cdot 0 = 0$, og for den øvre grænse $b = \pi$ er $t(\pi) = \frac{\pi}{2}$.

Vi gennemfører nu beregningerne med *t* som variabel, hvor vi undervejs erstatter de oprindelige grænser med de nye grænser:

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi} 4 \cdot \cos\left(\tfrac{1}{2}x\right) dx &= \int_0^{\frac{\pi}{2}} 4 \cdot \cos t \cdot 2dt = \int_0^{\frac{\pi}{2}} 8\cos t\ dt \\ &= \Big[8\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 8\sin\left(\tfrac{\pi}{2}\right) - 8\sin 0 = 8.\end{aligned}$$