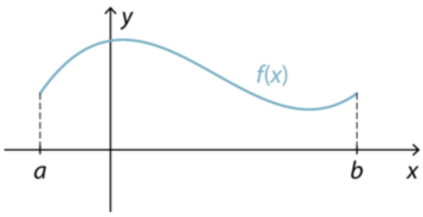
Solide og hule omdrejningslegemer

MAT A3, stx, Systime

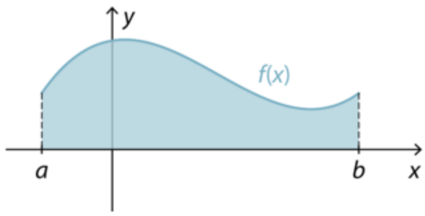
2.6 Rumfang

Vi skal nu se, hvordan det bestemte integral kan benyttes til at bestemme rumfang af såkaldte *omdrejningslegemer*.

På figur 30 ses grafen for en ikke-negativ, kontinuert funktion $f(x)$ i intervallet $[a; b]$. Indtil nu har vi beregnet arealet mellem grafen for $f(x)$ og x-aksen i intervallet $[a; b]$ (se figur 31).

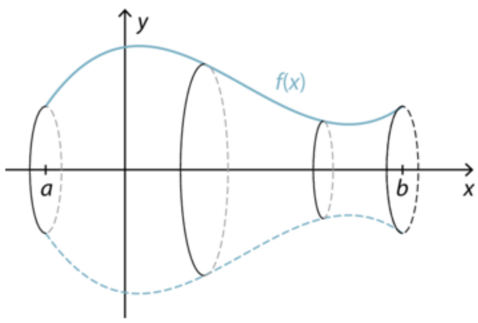


Figur 30



Figur 31

Vi forestiller os nu, at grafen for $f(x)$ drejes 360° om x-aksen (se figur 32). På denne måde fremkommer et såkaldt *omdrejningslegeme*, der svarer til, at hele området mellem x-aksen og grafen for $f(x)$ er drejet 360° om x-aksen.



Figur 32

Rumfanget af dette omdrejningslegeme kan bestemmes på følgende måde:

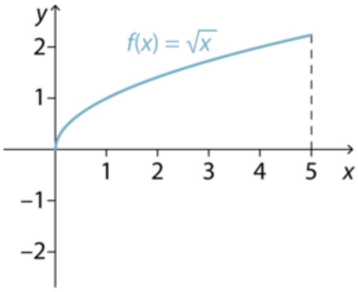
Sætning 10 (Rumfang af omdrejningslegeme)

Lad $f(x)$ være kontinuert og ikke-negativ i intervallet $[a; b]$. Det omdrejningslegeme, der fremkommer ved at rotere grafen for $f(x)$ 360° om x-aksen, har rumfanget

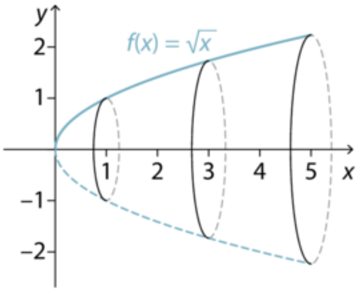
$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx.$$

Eksempel 14

På figur 33 ses grafen for funktionen $f(x) = \sqrt{x}$ i intervallet [0; 5]. I dette interval er funktionen ikke-negativ og kontinuert. Omdrejningslegemet, der fremkommer, når grafen for $f(x)$ roteres 360° om x-aksen i intervallet [0; 5] er vist på figur 34.



Figur 33



Figur 34

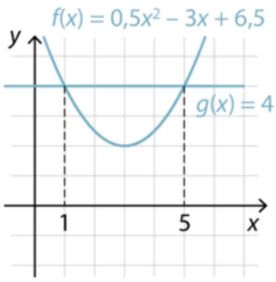
Ifølge sætning 10 kan rumfanget af omdrejningslegemet bestemmes på følgende måde:

$$V = \pi \int_0^5 f(x)^2 dx = \pi \int_0^5 \sqrt{x}^2 dx = \pi \int_0^5 x \, dx$$

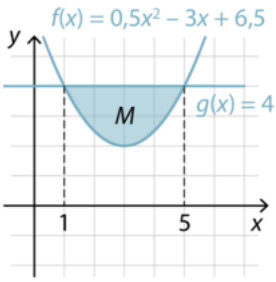
$$= \pi \left[\frac{1}{2}x^2\right]_0^5 = \pi \left(\frac{1}{2} \cdot 5^2 - \frac{1}{2} \cdot 0^2\right) = \frac{25\pi}{2}.$$

Eksempel 15

Vi betragter funktionen $f(x) = 0{,}5x^2 - 3x + 6{,}5$ og den vandrette linje med forskriften $g(x) = 4$ (se figur 35). Graferne for de to funktioner afgrænser et område M, der har et areal (se figur 36)



Figur 35



Figur 36

De to funktioners grafer skærer hinanden for $x = 1$ og $x = 5$, og da grafen for $g(x)$ er øverst i intervallet [1; 5], kan arealet af M bestemmes ved:

$$A_M = \int_1^5 \left(4 - \left(0{,}5x^2 - 3x + 6.5\right)\right) dx = \int_1^5 \left(-0.5x^2 + 3x - 2.5\right) dx \approx 5{,}33.$$

Vi kan også beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden M roteres 360° om x-aksen.

Først beregner vi i CAS rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når $g(x) = 4$ roteres 360° om x-aksen (se figur 37):

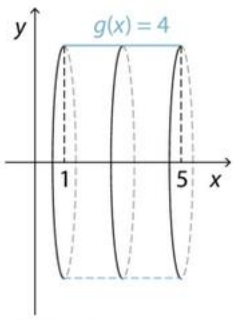
$$V_g = \pi \int_1^5 4^2 dx = \pi \left[16x\right]_1^5 = 64\pi \approx 201{,}06.$$

Dernæst beregner vi i CAS rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når grafen for $f(x)$ roteres 360° om x-aksen (se figur 38):

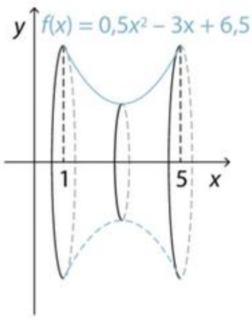
$$V_f = \pi \int_1^5 f(x)^2 dx = \pi \int_1^5 \left(0{,}5x^2 - 3x + 6.5\right)^2 dx = 29{,}87\pi \approx 93{,}83.$$

Det ønskede rumfang bestemmes ved at trække det mindste rumfang fra det største (se figur 39):

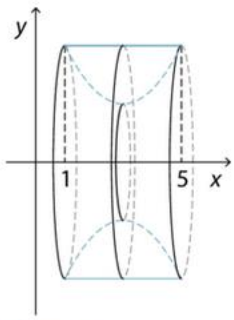
$$V_M = V_g - V_f = 201{,}06 - 93{,}83 = 107{,}23.$$



Figur 37

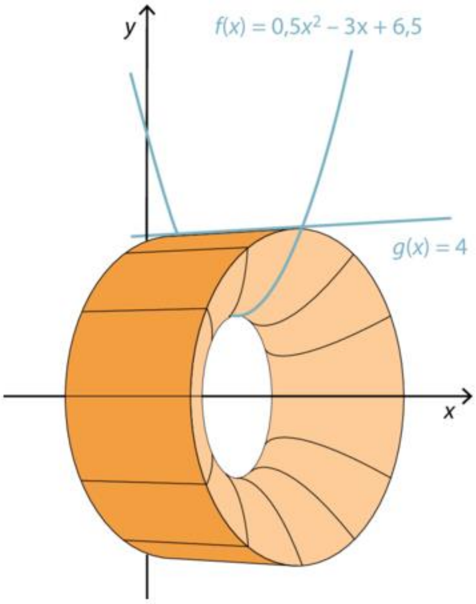


Figur 38



Figur 39

Der er hér tale om et omdrejningslegeme af form som en ring med cylinderformet yderside og en buet inderside (se figur 40).



Figur 40

I forlængelse af eksempel 15 formulerer vi følgende sætning, som kan benyttes til at beregne rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når punktmængden mellem to grafer roteres 360° om førsteaksen. Den figur, vi beregner rumfanget af, kan opfattes som et ringformet omdrejningslegeme.

Sætning 11 (Omdrejningslegeme mellem grafer)

Lad $f(x)$ og $g(x)$ være ikke-negative og kontinuerte i $[a; b]$, og lad $f(x) \geq g(x)$ i $[a; b]$. Lad endvidere M betegne punktmængden mellem $f(x)$ og $g(x)$ i intervallet $[a; b]$.

Rumfanget af det omdrejningslegeme, der fremkommer, når M roteres 360° om førsteaksen, er givet ved

$$V = \pi \int_a^b f(x)^2 dx - \pi \int_a^b g(x)^2 dx = \pi \int_a^b \left(f(x)^2 - g(x)^2 \right) dx.$$