

Graf for omvendte funktioner (MAT A1 stx, Systime)

Grafen for f og f^{-1}



Figur 41 og figur 42 antyder et særligt forhold mellem grafen for en funktion og grafen for den omvendte funktion. Øjensynligt er graferne hinandens spejlbilleder i linjen $y = x$. Det er tilfældet:

Sætning 2

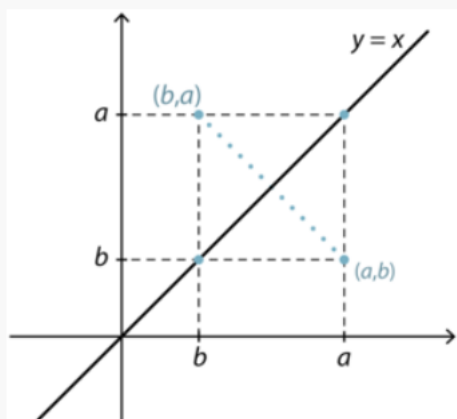


Grafen for f og grafen for f^{-1} er hinandens spejlbilleder i linjen med ligningen $y = x$.

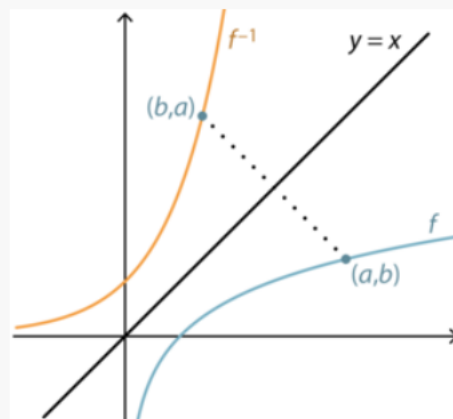
Bevis



Punkterne (a,b) og (b,a) fremgår af hinanden ved spejling i linjen $y = x$. Det er illustreret på figur 43. Man ser, at punkterne er modstående hjørner i et kvadrat med linjen $y = x$ som diagonal.



Figur 43



Figur 44

Vi ser nu på et punkt (a,b) på grafen for f (figur 44). Vi har ligningen

$$f(a) = b,$$

og da f og f^{-1} er hinandens omvendte, har vi også

$$a = f^{-1}(b).$$

Den sidste ligning viser, at punktet (b,a) ligger på grafen for f^{-1} .

Vi har med andre ord vist, at (a,b) er på grafen for f , netop når (b,a) er på grafen for f^{-1} . Fordi punkter af den type fremkommer af hinanden ved spejling i linjen $y = x$, så må det samme være tilfældet med graferne for f og f^{-1} .

Eksempel 19



Bremselængden i m for en bil afhænger af hastigheden i km/t, og det viser sig, at den er proportional med kvadratet på hastigheden. Hvis x er hastigheden i km/t og y bremselængden i m, gælder nemlig

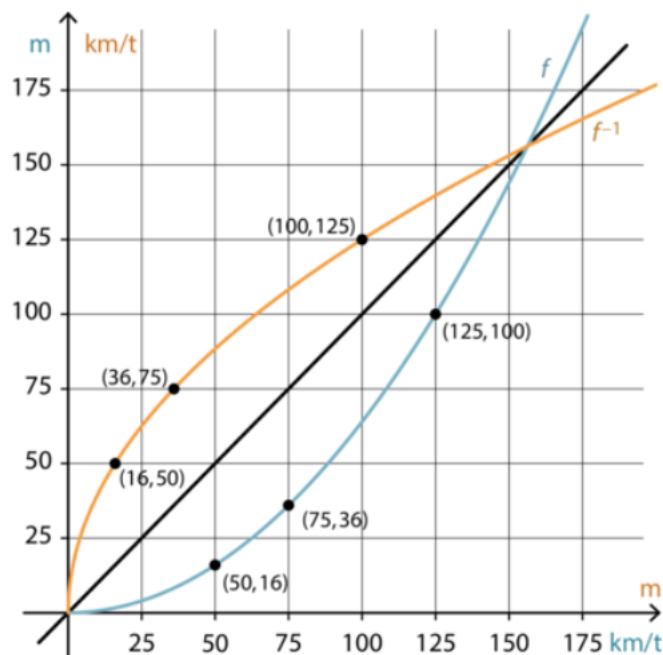
$$f(x) = y = 0,0064x^2.$$

F.eks. giver hastigheder på 50, 75 og 125 km/t bremselængder på 16, 36 og 100 m. Grafen for denne funktion er vist på figur 46. Den går altså gennem punkterne (50,16), (75,36) og (125,100).

Vi har her valgt den uafhængige variabel x som bilens hastighed og den afhængige variabel y som bremselængden. Funktionen er altså svar på spørgsmålet: Hvilken bremselængde i m svarer til en given hastighed?

Nu stiller vi det omvendte spørgsmål: Hvilken hastighed svarer til en given bremselængde? Løsningen på dette problem er politiet interesseret i ved undersøgelser af færdselsulykker.

Det betyder, at vi nu ønsker bremselængden på x -aksen som den uafhængige variabel og hastigheden på y -aksen som den afhængige variabel. Den graf, der svarer til denne situation, er også vist på figur 46. Den går gennem punkterne (16,50), (36,75) og (100,125), fordi en bremselængde på f.eks. 16 m svarer til en hastighed på 50 km/t.



Figur 46

Vi kan bestemme regneforskriften for funktionen f^{-1} ved at isolere x i forskriften for f :

$$y = 0,0064x^2 \Leftrightarrow x^2 = \frac{y}{0,0064} \Leftrightarrow x^2 = 156,25y$$

$$\Leftrightarrow x = 12,5 \cdot \sqrt{y}$$

fordi både x og y er ikke-negative. Den omvendte funktion har derfor forskriften

$$f^{-1}(x) = 12,5\sqrt{x}.$$

Hvis politiet derfor kan måle en bremselængde på f.eks. 36 m, kan man konkludere, at hastigheden var $f^{-1}(36) = 12,5 \cdot \sqrt{36} = 75$ km/t (dog afhængigt af føret).

De to funktioners grafer består af punkter, hvis x - og y -koordinat er byttet om.

