

Figur 19

En anden partikels bevægelse kan beskrives med

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Som før passerer partiklen punktet (2,3), og fordi hastighedsvektorerne

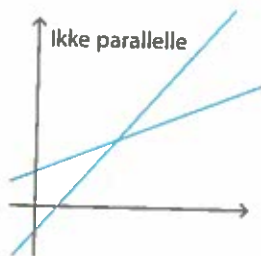
$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ og } \begin{pmatrix} -8 \\ -2 \end{pmatrix}$$

er parallelle, bevæger begge partikler sig ad den samme linje. Hastighedsvektoren for den anden partikel er dobbelt så lang og orienteret modsat hastighedsvektoren for den første partikel. Den anden partikel gennemløber derfor linjen med en dobbelt så stor fart og i den modsatte retning i forhold til den første partikel.

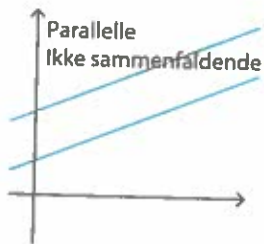
Vi vender tilbage til emnet *vektorfunktioner* i MAT A3 stx.

SKÆRING MELLEMLINJER

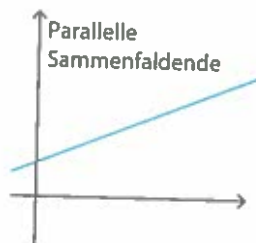
To linjer i planen har ét skæringspunkt, ingen skæringspunkter eller uendelig mange skæringspunkter afhængigt af linjernes indbyrdes placering:



Figur 20



Figur 21

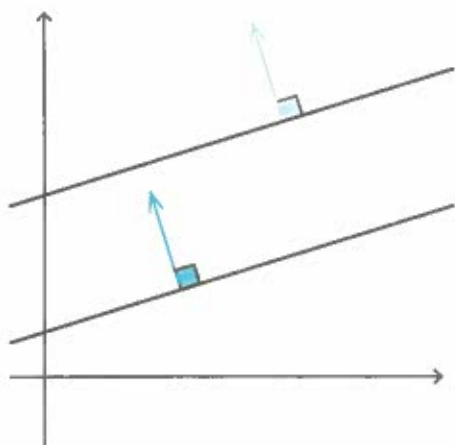


Figur 22

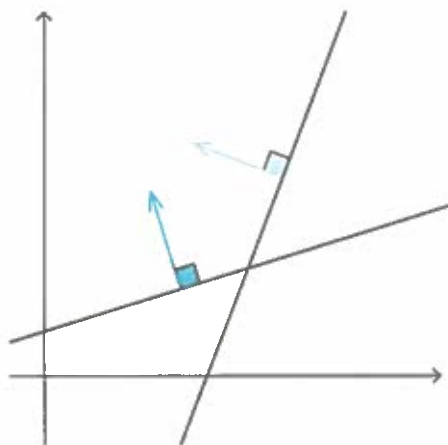
Beregning af skæringspunkter kan foretages på flere måder. Vi skal i det følgende se teknikker til at bestemme et skæringspunkt, når linjerne er givet ved to ligninger, to parameterfremstillinger og en ligning og en parameterfremstilling.

TO LIGNINGER

To linjer er parallelle, netop når linjernes normalvektorer er parallelle. Det kan vi benytte til at afgøre, om to linjer, der begge er givet ved en ligning, har et skæringspunkt eller ej.



Figur 23



Figur 24

Et evt. skæringspunkt bestemmes ved at løse to ligninger med to ubekendte. Vi har tidligere (i *MAT stx grundforløb*) demonstreret de to teknikker *lige store koefficienters metode* og *substitutionsmetoden*, og viser også her, hvordan metoderne forløber.

EKSEMPEL 8

Linjerne m og n har ligningerne

$$m: 2x + 3y - 4 = 0 \quad \text{og} \quad n: 4x - 5y - 30 = 0.$$

Vi bemærker, at de to normalvektorer $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$ ikke er parallelle. Linjerne har derfor et skæringspunkt.

Ligningerne udgør et ligningssystem, som vi løser med lige store koefficienters metode. Vi skaffer den samme koefficient til x og trækker efterfølgende den ene ligning fra den anden ligning.

$$\begin{cases} 2x + 3y - 4 = 0 \\ 4x - 5y - 30 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 4x + 6y - 8 = 0 \\ 4x - 5y - 30 = 0 \end{cases}$$

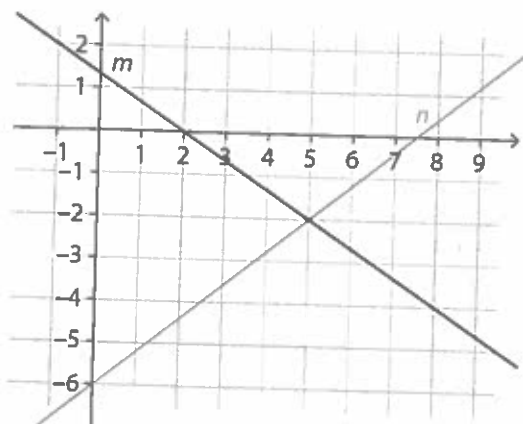
Når vi trækker den nederste ligning fra den øverste, får vi en ligning, hvor x ikke optræder:

$$11y + 22 = 0 \Leftrightarrow y = -2.$$

Resultatet indsættes i en af de to oprindelige ligninger. Vi vælger den første:

$$2x + 3 \cdot (-2) - 4 = 0 \Leftrightarrow 2x - 10 = 0 \Leftrightarrow x = 5.$$

Linjernes skæringspunkt er altså $(x, y) = (5, -2)$. Situationen er vist på figur 25.



Figur 25

EKSEMPEL 9

Skæringspunktet mellem de to ikke-parallele linjer

$$m: 2x - 3y - 6 = 0 \quad \text{og} \quad n: -3x + 5y + 11 = 0$$

skal bestemmes vha. substitutionsmetoden. Vi isolerer den ene ubekendte i den ene ligning og indsætter resultatet i den anden ligning. Vi vælger at isolere x i den første ligning:

$$2x - 3y - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 3y + 6 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2}y + 3.$$

Resultatet indsætter vi i den anden ligning:

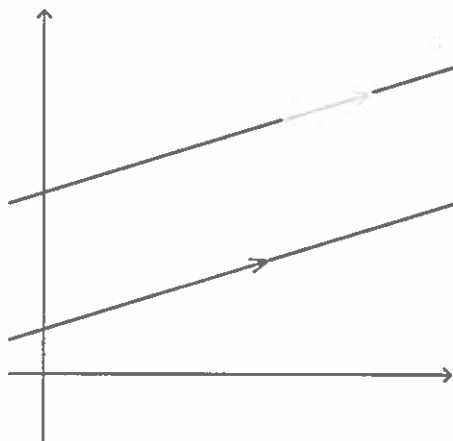
$$\begin{aligned} -3\left(\frac{3}{2}y + 3\right) + 5y + 11 &= 0 \Leftrightarrow -\frac{9}{2}y - 9 + 5y + 11 = 0 \\ &\Leftrightarrow -\frac{9}{2}y + 5y + 2 = 0 \\ &\Leftrightarrow -9y + 10y + 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow y = -4. \end{aligned}$$

Når $y = -4$ indsættes i en af de to oprindelige ligninger fås $x = -3$, og linjernes skæringspunkt er derfor $(x, y) = (-3, -4)$.

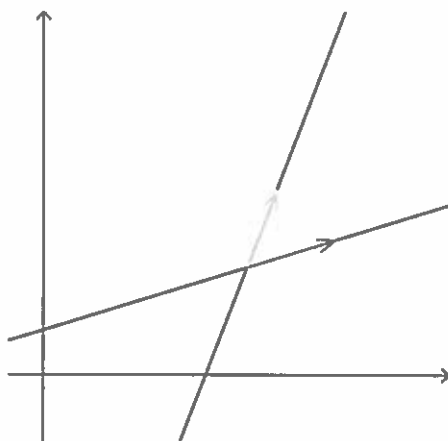
Eksemplet illustrerer den besværlighed ved metoden, at den ofte fører til regning med brøker.

TO PARAMETERFREMSTILLINGER

Når begge linjer er givet ved en parameterfremstilling, kan vi af retningsvektorerne afgøre, om linjerne skærer hinanden: Hvis og kun hvis retningsvektorerne er parallelle, er linjerne parallelle. Se figur 26 og 27.



Figur 26



Figur 27

Vi viser med to eksempler, hvordan skæringspunktet mellem ikke-parallelle linjer kan beregnes.

EKSEMPEL 10

Vi ser på linjerne l og m med parameterfremstillingerne:

$$l: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad m: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Retningsvektorerne $\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ er ikke parallelle, og linjerne har derfor et skæringspunkt. Vi omdøber først parameteren for den ene af linjerne til s , f.eks. i m . Skæringspunktet (x, y) mellem l og m må have parameterverdier s og t , som passer ind i ligningssystemet

$$\begin{cases} 6 - 2t = 2 + s \\ -1 + 3t = -4 + 3s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -18 + 6t = -6 - 3s \\ -1 + 3t = -4 + 3s \end{cases}$$

Vi har her multipliceret den første ligning med -3 , så parameteren s forsvinder, når ligningerne lægges sammen:

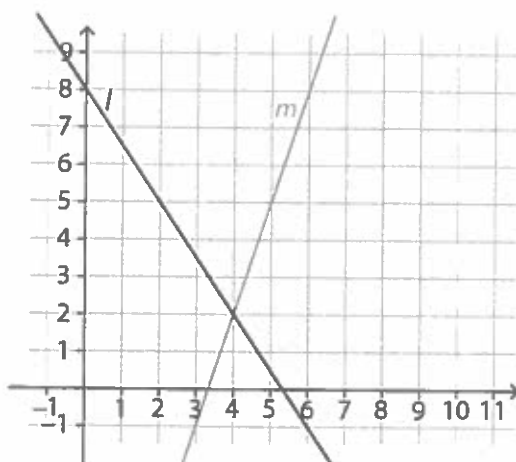
$$\begin{aligned} -18 - 1 + 6t + 3t &= -6 - 4 \Leftrightarrow -19 + 9t = -10 \\ &\Leftrightarrow 9t = 9 \Leftrightarrow t = 1. \end{aligned}$$

Skæringspunktet kan nu beregnes ved at indsætte $t = 1$ i parameterfremstillingen for l :

$$(x, y) = (6 + 1 \cdot (-2), -1 + 1 \cdot 3) = (4, 2).$$

Indsættes $t = 1$ i en af de to oprindelige ligninger, finder man $s = 2$. Skæringspunktet kan derfor også beregnes ved at indsætte parameterværdien 2 i parameterfremstillingen for m :

$$(x, y) = (2 + 2 \cdot 1, -4 + 2 \cdot 3) = (4, 2).$$



Figur 28

EKSEMPEL 11

To partikler p_1 og p_2 foretager begge i planen en jævn, retlinjet bevægelse:

$$p_1: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad p_2: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -9 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Parametrene s og t regnes i sekunder, og afstanden måles i meter.

Vi ser, at retningsvektorerne ikke er parallelle, og at partiklernes banekurver derfor krydser hinanden. Men støder partiklerne også sammen? Det kan vi afgøre ud fra de værdier for s og t , der løser ligningssystemet

$$\begin{cases} 1 - 3t = -9 + 2s \\ -2 + 2t = s \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 - 3t = -9 + 2s \\ 4 - 4t = -2s \end{cases}$$

Vi lægger ligningerne sammen og får:

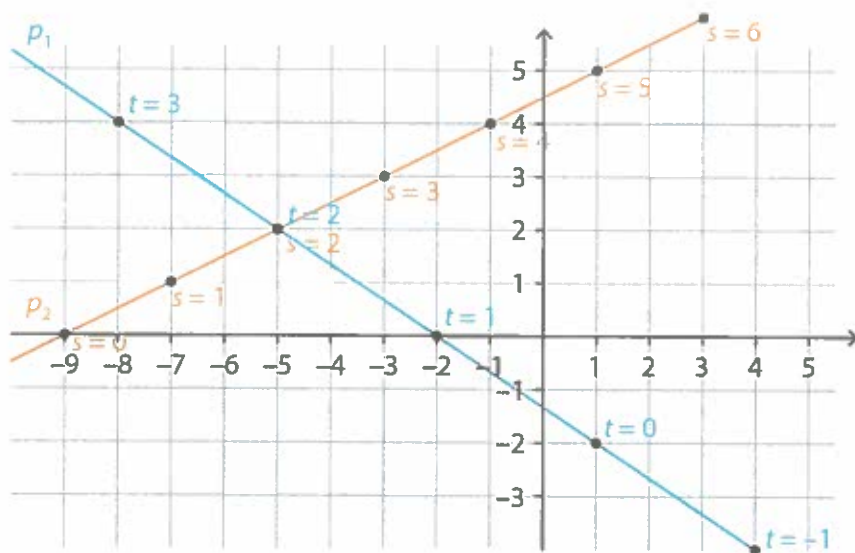
$$1 + 4 - 3t - 4t = -9 \Leftrightarrow -7t = -14 \Leftrightarrow t = 2.$$

Resultatet benyttes til at bestemme s :

$$s = -2 + 2 \cdot t = -2 + 2 \cdot 2 = 2.$$

Beregningen viser, at partiklerne befinder sig i banekurvernes skæringspunkt til det samme tidspunkt, og at de derfor kolliderer. Kollisionspunktet finder vi ved at indsætte parameterværdien 2 i en af parameterfremstillingerne, f.eks. den anden:

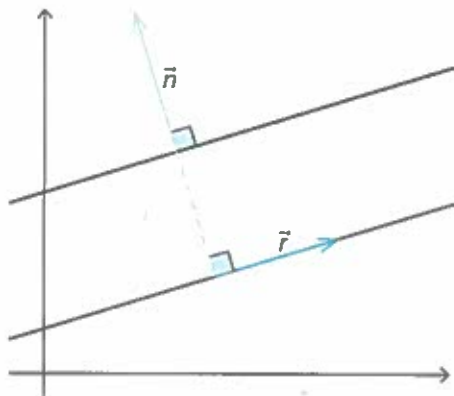
$$(x, y) = (-9 + 2 \cdot 2, 0 + 2 \cdot 1) = (-5, 2).$$



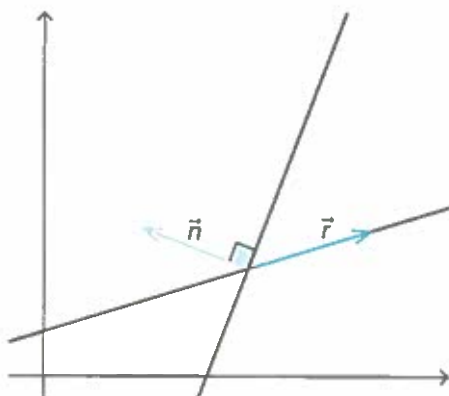
Figur 29

EN LIGNING OG EN PARAMETERFREMSTILLING

Når linjerne er givet ved en ligning og en parameterfremstilling, kan vi afgøre, om linjerne er parallelle, ved at sammenligne normalvektoren \vec{n} for den ene linje med retningsvektoren \vec{r} for den anden. Hvis, og kun hvis, \vec{n} og \vec{r} er ortogonale, er linjerne parallelle. Det er vist på figur 30 og 31.



Figur 30



Figur 31

Hvis linjerne har et skæringspunkt, kan det bestemmes ved at sammensætte parameterfremstillingen og ligningen.

EKSEMPEL 12

Vi ser på de to linjer

$$l: 5x + 2y - 4 = 0 \quad \text{og} \quad p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -11 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix}.$$

Beregningen

$$\vec{n} \cdot \vec{r} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 6 \end{pmatrix} = 5 \cdot 4 + 2 \cdot 6 = 32 \neq 0$$

viser, at prikproduktet mellem normalvektoren \vec{n} for linjen l og retningsvektoren \vec{r} for linjen p er forskellig fra 0. De to vektorer er derfor ikke ortogonale, og linjerne er derfor ikke parallelle. Skæringspunktet kan bestemmes ved at gå frem på følgende måde:

Punktet (x, y) ligger på p , når

$$x = x(t) = 2 + 4t \quad \text{og} \quad y = y(t) = -11 + 6t$$

for et eller andet tal t . Vi indsætter de to udtryk i ligningen for l og får på den måde en værdi for parameteren t , så punktet $(x(t), y(t))$ også ligger på l .

$$\begin{aligned} 5(2 + 4t) + 2(-11 + 6t) - 4 &= 0 \Leftrightarrow 10 + 20t - 22 + 12t - 4 = 0 \\ &\Leftrightarrow 32t - 16 = 0 \Leftrightarrow t = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Da

$$\left(2 + \frac{1}{2} \cdot 4, -11 + \frac{1}{2} \cdot 6\right) = (4, -8),$$

er skæringspunktet $(4, -8)$.

EKSEMPEL 13

Vi ser på de to linjer

$$l: 3x + 5y - 31 = 0 \quad \text{og} \quad p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

Når vi indsætter parameterfremstillingen i ligningen, får vi

$$\begin{aligned} 3(-3 + 5t) + 5(8 - 3t) - 31 &= 0 \Leftrightarrow -9 + 15t + 40 - 15t - 31 = 0 \\ &\Leftrightarrow 0 = 0. \end{aligned}$$

Beregningen viser, at for enhver værdi af parameteren t ligger punktet

$$(x(t), y(t)) = (-3 + 5t, 8 - 3t)$$

på linjen for l . Linjerne er derfor parallelle og sammenfaldende.

ORTOGONALE LINJER

Vi skal se på teknikker til at bestemme ligninger eller parameterfremstillinger for en linje, der står vinkelret på en anden given linje.

EKSEMPEL 14

Vi ønsker at bestemme en ligning for den linje m , der går igennem $P_0(7, 3)$ og står vinkelret på linjen l med ligningen

$$l: 3x + 2y - 18 = 0.$$

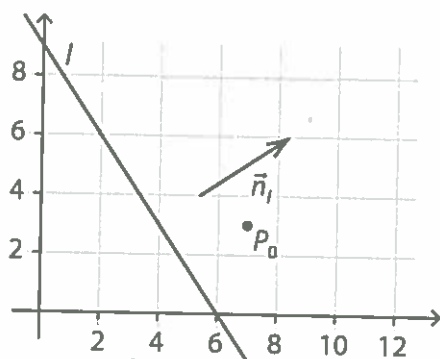
Normalvektoren for l $\vec{n}_l = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$ er retningsvektor for m . Med

$$\vec{n}_m = \hat{n}_l = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

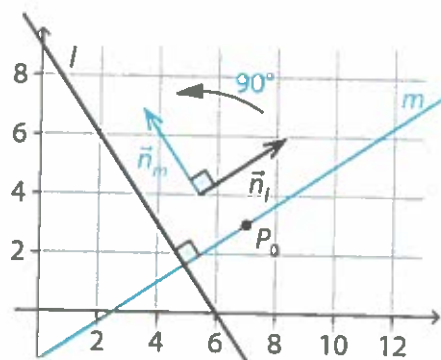
fås derfor en normalvektor til m . Ligningen for m kan nu bestemmes med sætning 1:

$$\begin{aligned} -2(x - 7) + 3(y - 3) = 0 &\Leftrightarrow -2x + 14 + 3y - 9 = 0 \\ &\Leftrightarrow -2x + 3y + 5 = 0. \end{aligned}$$

Se figur 32 og 33.



Figur 32



Figur 33

EKSEMPEL 15

Vi søger parameterfremstillingen for den linje p , der går igennem $P_0(2, 6)$, og som er vinkelret på linjen n med parameterfremstillingen

$$n: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 4 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}.$$

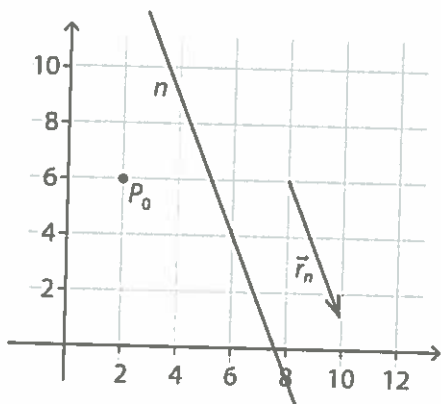
Tværvektoren til retningsvektoren \vec{r}_n for linjen n er en retningsvektor for linjen p :

$$\vec{r}_p = \hat{r}_n = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

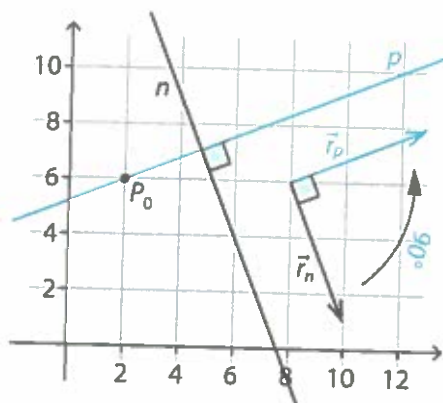
En parameterfremstilling for p er derfor givet ved

$$p: \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Se figur 34 og 35.



Figur 34



Figur 35

Hvis linjens ligning er på formen $y = ax + b$, kan man benytte, at der om hældningerne for ortogonale linjer gælder følgende resultat:

SÆTNING 4

To skrå linjer

$$l: y = ax + b \quad \text{og} \quad m: y = cx + d$$

er ortogonale, hvis og kun hvis produktet af hældningerne er -1 :

$$ac = -1.$$

BEVIS
En linje

Fig

Vektore

er derfo

Linjerne

har vi d

EKSEMI

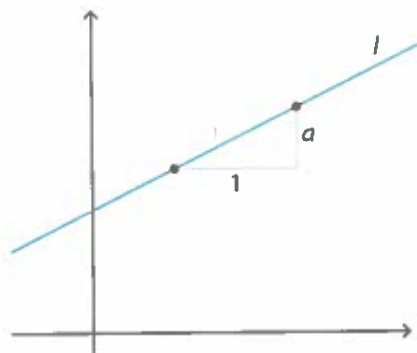
Vi skal b
på linjen

Med bete

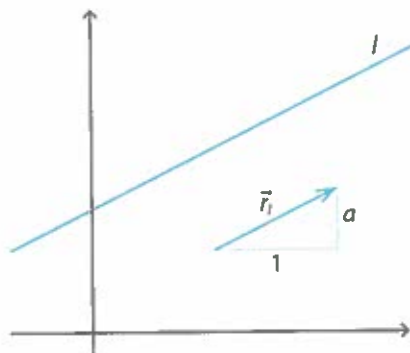
Om hælde

BEVIS

En linjes hældning angiver ændringen i y -koordinaten, når x -koordinaten vokser med 1.



Figur 36



Figur 37

Vektorerne

$$\vec{r}_l = \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \vec{r}_m = \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix}$$

er derfor retningsvektorer til hhv. l og m .

Linjerne l og m er ortogonale, hvis og kun hvis \vec{r}_l og \vec{r}_m er ortogonale. Med formlen

$$\vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0$$

har vi derfor:

$$\begin{aligned} l \perp m &\Leftrightarrow \vec{r}_l \perp \vec{r}_m \\ &\Leftrightarrow \vec{r}_l \cdot \vec{r}_m = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 \\ a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ c \end{pmatrix} = 0 \\ &\Leftrightarrow 1 + ac = 0 \Leftrightarrow ac = -1. \end{aligned}$$

EKSEMPEL 16

Vi skal bestemme forskriften for den linje m , der går gennem $P_0(6, 8)$, og som er ortogonal på linjen l med forskriften

$$y = \frac{3}{4}x - 2.$$

Med betegnelserne $m: y = cx + d$ skal vi bestemme konstanterne c og d .

Om hældningen c gælder ifølge sætning 4

$$\frac{3}{4} \cdot c = -1 \Leftrightarrow 3 \cdot c = -4 \Leftrightarrow c = -\frac{4}{3}.$$

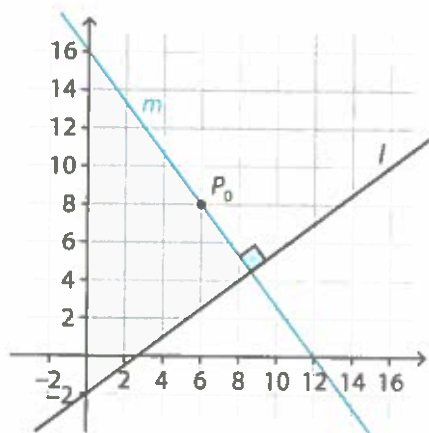
Da linjen skal gå gennem $(6, 8)$, har vi desuden ligningen

$$8 = -\frac{4}{3} \cdot 6 + d \Leftrightarrow d = 8 + \frac{24}{3} \Leftrightarrow d = 16.$$

altså er forskriften for linjen m

$$y = -\frac{4}{3}x + 16.$$

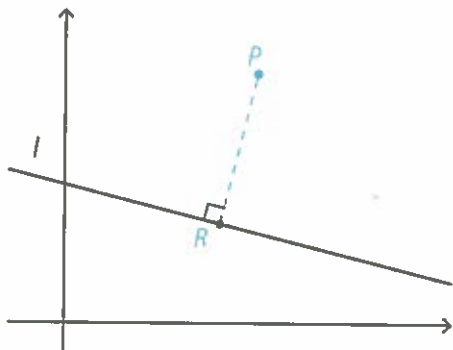
Se figur 38.



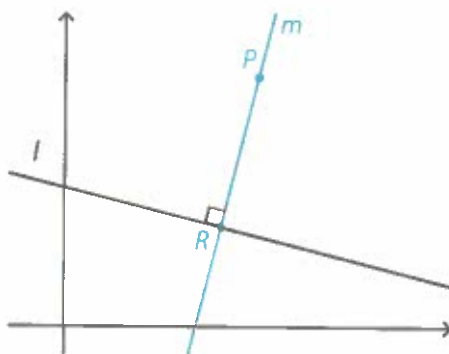
Figur 38

PROJEKTION AF PUNKT PÅ LINJE

Der er givet en linje l og et punkt P uden for l . Ved P 's *projektion* på l forstås vi det punkt R på l , der er resultatet af at nedfælde P vinkelret på l . Vi kan bestemme R på flere måder, f.eks. som skæringspunktet mellem l og den linje m , der er vinkelret på l og går gennem P .



Figur 39



Figur 40

EKSEMPEL

Vi ønsker

1. metode

Koordinat
ortogonal

er en nor

er derfor e

Vi får en li

Skærings

Vi lægger

Resultat
punkt er a