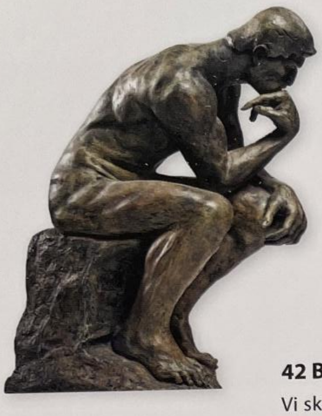
Bevis - y'=ky (med hjælpefunktion)

Fra: Kernestof Mat 3 stx



6.6 Beviser

[12 Sætning, afsnit 6.2]
Den fuldstændige løsning til den **proportionale differentialligning** $y' = k \cdot y$ er givet ved forskriften $y = c \cdot e^{kx}$.
Her er k den proportionalitetsfaktor, som er givet i ligningen, og c er et reelt tal, der skal bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne.

42 Bevis for sætning 12

Vi skal bevise to ting:

Første del:
At funktioner af typen $f(x) = c \cdot e^{kx}$ er løsninger til $y' = k \cdot y$. Det bevises ved indsættelse. Venstre side af ligningen bliver $y' = f'(x) = (c \cdot e^{kx})' = c \cdot k \cdot e^{kx}$
Højre side bliver $k \cdot y = k \cdot f(x) = k \cdot c \cdot e^{kx}$
De to sider giver det samme, så vi kan konkludere, at funktioner af typen $f(x) = c \cdot e^{kx}$ er løsninger til $y' = k \cdot y$.

Anden del:
At der ikke er flere løsninger end funktioner af typen $f(x) = c \cdot e^{kx}$. Altså, at hvis en funktion f er løsning til $y' = k \cdot y$, så er funktionen af typen $f(x) = c \cdot e^{kx}$.
Vi antager nu, at en funktion f er løsning til $y' = k \cdot y$. Dvs. $f'(x) = k \cdot f(x)$.
Vi skal nu bruge en hjælpefunktion, g, som vi vil definere ved $g(x) = e^{-kx} \cdot f(x)$.
Denne funktion kan vi differentiere med produktreglen

$$\begin{aligned} g'(x) &= \left(e^{-kx} \cdot f(x)\right)' \\ &= \left(e^{-kx}\right)' \cdot f(x) + e^{-kx} \cdot f'(x) \\ &= -k \cdot e^{-kx} \cdot f(x) + e^{-kx} \cdot f'(x). \end{aligned}$$

Vi bruger nu, at vi har antaget, at f er en løsning, så $f'(x) = k \cdot f(x)$

$$\begin{aligned} \ldots &= -k \cdot e^{-kx} \cdot f(x) + e^{-kx} \cdot k \cdot f(x) \\ &= -k \cdot e^{-kx} \cdot f(x) + k \cdot e^{-kx} \cdot f(x) \\ &= 0. \end{aligned}$$

Vi har altså vist, at $g'(x) = 0$, uanset hvad x er. Det kan kun lade sig gøre, hvis g er en konstant funktion. Vi kalder konstanten c, så vi har $g(x) = c$.
Det giver os følgende:

$$\begin{aligned} g(x) &= c \\ e^{-kx} \cdot f(x) &= c \\ \frac{1}{e^{kx}} f(x) &= c \\ f(x) &= c \cdot e^{kx}. \end{aligned}$$

Vi har altså vist, at hvis f er en løsning, så er den nødt til at være på formen $f(x) = c \cdot e^{kx}$.

Produktreglen

$$\left(p(x) \cdot q(x)\right)' = p'(x) \cdot q(x) + p(x) \cdot q'(x).$$

Potensregneregel

$$p^{-n} = \frac{1}{p^n}\ .$$