Bevis - y'=b-ay (med hjælpefunktion)

Fra: Kernestof Mat 3 stx

7.4 Beviser

[5 Sætning, afsnit 7.1]
Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' = b - a \cdot y,$$

er givet ved forskriften

$$y = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}.$$

Her er a og b parametre givet i ligningen, og c er et reelt tal, der skal bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne.

29 Bevis for sætning 5
Først vil vi vise, at funktioner af typen $f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$ er løsninger til $y' = b - a \cdot y$ ved at tjekke.
Venstre side af lighedstegnet:

$$y' = f'(x) = 0 + c \cdot (-a) \cdot e^{-ax} = -cae^{-ax}.$$

Højre side:

$$b - a \cdot y = b - a \cdot f(x) = b - a \cdot \left(\frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}\right) = b - b - a \cdot c \cdot e^{-ax} = -cae^{-ax}.$$

Begge sider giver det samme, så $f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$ er en løsning.
Vi skal nu vise, at der ikke er andre løsninger. Vi antager derfor, at funktionen f er en løsning. Dvs. vi ved, at $f'(x) = b - a \cdot f(x)$.
Hvis $-a$ sættes uden for en parentes, kan det omskrives til

$$f'(x) = -a \cdot \left(-\frac{b}{a} + f(x)\right) = -a \cdot \left(f(x) - \frac{b}{a}\right).$$

Vi kan nu definere en hjælpefunktion $g(x) = f(x) - \frac{b}{a}$.
Denne hjælpefunktion har samme afledede funktion som $f(x)$, idet

$$g'(x) = \left(f(x) - \frac{b}{a}\right)' = f'(x) + 0 = f'(x).$$

Den fuldstændige løsning til differentialligningen $y' = k \cdot y$ er $y = c \cdot e^{kx}$.

Vi kan dermed omskrive differentialligningen til

$$g'(x) = -a \cdot g(x).$$

I kapitel 6 viste vi, at den fuldstændige løsning til denne ligning er $g(x) = c \cdot e^{-ax}$.
Hvis vi indsætter det i definitionen af hjælpefunktionen $g(x) = f(x) - \frac{b}{a}$, og isolerer $f(x)$, får vi $f(x) = \frac{b}{a} + c \cdot e^{-ax}$

[15 Sætning, afsnit 7.2]
Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x),$$

er givet ved forskriften

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}.$$

Her er $a(x)$ og $b(x)$ kontinuerte funktioner givet i ligningen, $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$, og c er et reelt tal, der skal bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne.