Bevis - panserformlen

Fra: Kernestof Mat 3 stx

[15 Sætning, afsnit 7.2]

Den fuldstændige løsning til differentialligningen

$$y' + a(x) \cdot y = b(x),$$

er givet ved forskriften

$$y = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)} \, dx + c \cdot e^{-A(x)}.$$

Her er $a(x)$ og $b(x)$ kontinuerte funktioner givet i ligningen, $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$, og c er et reelt tal, der skal bestemmes ud fra begyndelsesbetingelserne.

Beviset kommer på næste side… 😊

30 Bevis for sætning 15

Vi vil nøjes med at vise, at hvis funktionen $y = f(x)$ er en løsning, så er

$$f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}.$$

Med $y = f(x)$ indsat, bliver differentialligningen

$$f'(x) + a(x) \cdot f(x) = b(x).$$

Ideen i beviset går ud på at omskrive venstre side, så det ligner noget, der kommer fra differentiationen af et produkt. Det viser sig at være nyttigt at gange igennem med funktionen $e^{A(x)}$, hvor $A(x)$ er en stamfunktion til $a(x)$ (og da $a(x)$ er kontinuert, ved vi, at den har en stamfunktion). Med det får vi

$$e^{A(x)} \cdot f'(x) + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot f(x) = e^{A(x)} \cdot b(x).$$

Venstre side er nu lig med differentialet af $e^{A(x)} \cdot f(x)$. Det tjekker vi med en beregning, hvor vi både bruger produktreglen og kædereglen:

$$\begin{aligned}\left(e^{A(x)} \cdot f(x)\right)' &= \left(e^{A(x)}\right)' \cdot f(x) + e^{A(x)} \cdot f'(x)\\ &= e^{A(x)} \cdot A'(x) \cdot f(x) + e^{A(x)} \cdot f'(x)\\ &= e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot f(x) + e^{A(x)} \cdot f'(x)\\ &= e^{A(x)} \cdot f'(x) + e^{A(x)} \cdot a(x) \cdot f(x).\end{aligned}$$

Når det indsættes, bliver differentialligningen til

$$\left(e^{A(x)} \cdot f(x)\right)' = e^{A(x)} \cdot b(x).$$

Vi tager nu integralet på begge sider, og husker integrationskonstanten c.

$$e^{A(x)} \cdot f(x) = \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx + c$$

Vi kan nu isolere $f(x)$ ved at gange igennem med $e^{-A(x)}$:

$$\begin{aligned} e^{-A(x)} \cdot e^{A(x)} \cdot f(x) &= e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx + e^{-A(x)} \cdot c\\ e^{-A(x)+A(x)} \cdot f(x) &= e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx + c \cdot e^{-A(x)}\\ e^{0} \cdot f(x) &= e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx + c \cdot e^{-A(x)}\\ f(x) &= e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} \cdot b(x)dx + c \cdot e^{-A(x)}.\end{aligned}$$

Det sidste er netop, hvad vi skulle vise.

Det skal også vises, at $f(x) = e^{-A(x)} \cdot \int b(x) \cdot e^{A(x)}\, dx + c \cdot e^{-A(x)}$ faktisk er en løsning til differentialligningen. Det kan gøres som i de andre beviser ved at indsætte og vise, at det passer. Det giver imidlertid nogle meget lange udregninger, som vi vil springe over her.

Differentiation af et produkt (*produktreglen*):

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

Differentiation af en sammensat funktion (*kædereglen*):

$$(f(g(x)))' = f'(g(x)) \cdot g'(x).$$

Potensregneregler:

$$p^n \cdot p^m = p^{n+m}$$

$$p^{-q} = \frac{1}{p^q}$$

$$p^0 = 1.$$