Kernestof
Mat 1 stx

Per Gregersen og Majken Sabina Skov

5. Vektorer

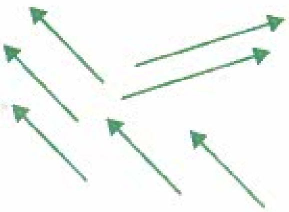
5.1 Vektorers koordinater

1 Introduktion

Vektorregning bruges i mange forskellige sammenhænge. Økonomer og ingeniører bruger vektorer, når de bygger økonomiske modeller og bygningsværker. Og softwareudviklere bruger vektorregning, når de skaber avanceret grafik til spil, film og virtual reality.

Vektor

En vektor er en længde og en retning, der hører sammen, fx "1 cm i nordvestlig retning". En vektor svarer dermed til en **mængde af pile med samme længde og retning**.

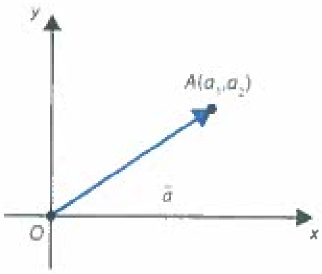


2 Eksempel

På figuren ses to vektorer. De fem pile, der peger skråt op mod venstre, er **repræsentanter** for den ene af de to vektorer. De to pile, der peger skråt op mod højre, er repræsentanter for den anden vektor.

En vektor navngives som regel med et lille bogstav med en pil henover, eksempelvis $\vec{a}$.

En vektor kan være fastlagt ved, at den går fra et punkt A til et punkt B. Sådan en vektor betegner vi $\overrightarrow{AB}$.
Alle vektorer $\vec{a}$ kan skrives på formen $\overrightarrow{AB}$. Vi kan altid lade pilens begyndelsespunkt starte i et punkt A og lade dens endepunkt være i et punkt B, og så har vi: $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.



3 Eksempel

I koordinatsystemet ses en vektor $\vec{a}$ fastlagt ved repræsentanten $\overrightarrow{OA}$, der går fra origo $O\,(0,0)$ til punkt A med koordinaterne (a_1,a_2).
Vektoren $\overrightarrow{OA}$ kaldes for **stedvektoren for punkt A**.

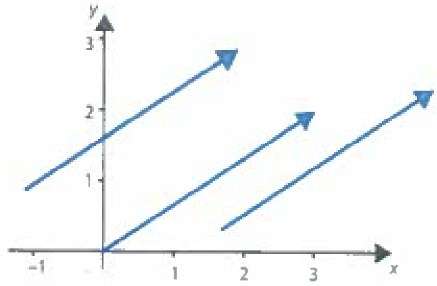
4 Definition

Koordinaterne til vektoren $\vec{a}$ defineres som punkt A's koordinater, og de skrives lodret for ikke at blande koordinater til punkter og vektorer sammen:

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

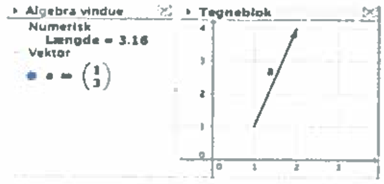
En vektors koordinater er dermed to tal, a_1 og a_2, som angiver, at man fra pilens begyndelsespunkt skal gå a_1 enheder i x-aksens retning og derefter a_2 enheder i y-aksens retning for at komme til pilens endepunkt.

5 Eksempel



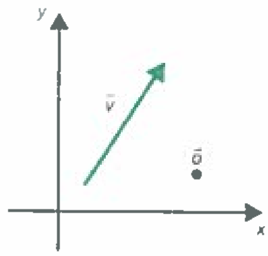
I koordinatsystemet ses 3 repræsentanter for vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$
For hver repræsentant gælder, at man kommer fra pilens startpunkt til dens endepunkt ved at gå:
3 enheder i x-aksens retning og
2 enheder i y-aksens retning.

6 Eksempel



I et CAS-program kan der også tegnes vektorer, og man kan få forskellige størrelser beregnet. Her har vi fået Geogebra til at beregne længden af vektoren $\vec{a}$.

7 Definition

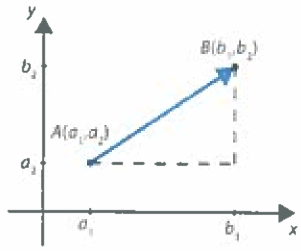


Den såkaldte **nulvektor** $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ har ingen længde og repræsenteres ved et punkt.
En vektor, der ikke er nulvektoren, kaldes en **egentlig vektor**.

8 Eksempel

I koordinatsystemet ses en egentlig vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ og nulvektoren $\vec{o} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

9 Sætning



Koordinaterne til en vektor mellem to punkter $A(a_1, a_2)$ og $B(b_1, b_2)$ bestemmes ved at trække startpunktets koordinater fra endepunktets koordinater: $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$

10 Øvelse

a. Tegn tre repræsentanter for vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ i et koordinatsystem på kvadreret papir.

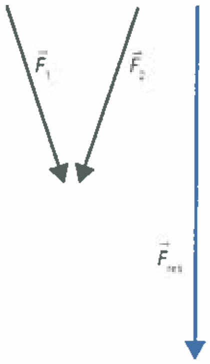
11 Øvelse

En vektor $\vec{a}$ fastlægges ved, at den går fra A til B, hvor $A(2,1)$ og $B(3,4)$.

a. Indtegn punkterne A og B og vektoren $\overrightarrow{AB}$ i et koordinatsystem.
b. Bestem koordinaterne til $\vec{a} = \overrightarrow{AB}$.
c. Tegn yderligere en repræsentant for vektor $\vec{a}$ i samme koordinatsystem med startpunkt i $(0,0)$.

12 Øvelse

a. Afsæt punkterne $A\,(-1,2)$ og $B(2,1)$ i et koordinatsystem i et CAS-program.
b. Tegn vektoren $\overrightarrow{AB}$, og bestem koordinaterne til $\overrightarrow{AB}$ vha. CAS.
c. Bestem også koordinaterne ved hjælp af formlen i sætning 9.

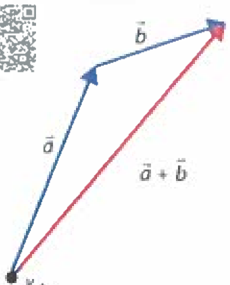


5.2 Vektorregneregler 1

13 Introduktion

Slæbebåden trækker i de to skrå stålwirer med ens kraft. På den tegnede vektormodel af situationen er vektorerne $\vec{F}_1$ og $\vec{F}_2$ de kræfter, der trækkes med i de to wirer. Længden af en vektor kan vise styrken i trækkraften – jo længere vektor, jo større kraft trækkes der med.

Summen af de to kræfter er lig med den blå vektor $\vec{F}_{res} = \vec{F}_1 + \vec{F}_2$.

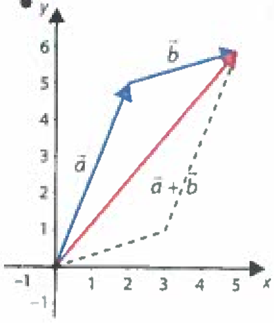


14 Definition

Summen af to vektorer er en ny vektor, hvor koordinaterne er summen af de to vektorers koordinater.

For vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er summen af dem $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} a_1 + b_1 \\ a_2 + b_2 \end{pmatrix}$.

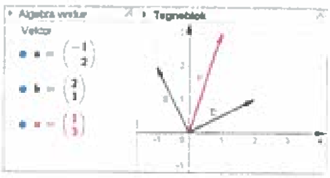
Geometrisk konstrueres summen ved, at $\vec{b}$ afsættes i endepunktet for $\vec{a}$.
Summen $\vec{a} + \vec{b}$ findes som pilen fra startpunktet for $\vec{a}$ til endepunktet for $\vec{b}$.



15 Eksempel

Summen af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ er: $\vec{a} + \vec{b} = \begin{pmatrix} 2+3 \\ 5+1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

I koordinatsystemet ses de tre vektorer. Bemærk, at **sumvektoren** ligger som diagonalen i et parallelogram, der har vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ som sider.



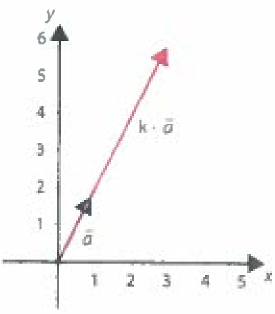
16 Eksempel

I Geogebra er to vektorer ***a*** og ***b*** indført ved deres koordinater som fremgår af skærmbilledet. De tildeles navnene ***a*** og ***b*** af programmet. Kommandoen "***a*** + ***b***" resulterer i sumvektoren ***u***.

17 Definition

En **vektor multipliceret med et tal, *k***, er en ny vektor $k \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} k \cdot a_1 \\ k \cdot a_2 \end{pmatrix}$.

Hvis k er positiv, har de to vektorer **samme retning**, er k negativ, har de to vektorer **modsat retning**. Hvis $k = 0$, fås en nulvektor uden retning.



18 Eksempel

Hvis en vektor $\vec{a}$ har en repræsentant, der går fra punktet (0,0) til punktet (1, 2), så vil vektor $3 \cdot \vec{a}$ have en repræsentant, der går fra punktet (0,0) til punktet (3, 6).

$$3 \cdot \vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \cdot 1 \\ 3 \cdot 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$$

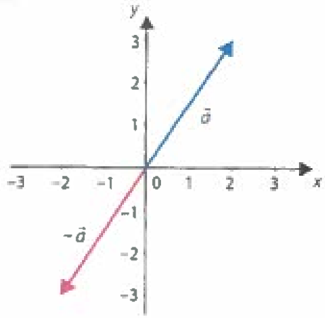
19 Definition

Den **modsatte vektor** til en vektor $\vec{a}$ kaldes $-\vec{a}$ og er repræsenteret ved en pil med samme længde som vektor $\vec{a}$, men modsat retning. Dens koordinater er givet ved

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -a_1 \\ -a_2 \end{pmatrix}.$$

Den modsatte vektor er dermed det samme som vektoren $-1 \cdot \vec{a}$, dvs. vektor $\vec{a}$ multipliceret med minus en.

20 Eksempel



En vektor $\vec{a}$ har en repræsentant, der går fra punktet (0,0) til punktet (2,3). Den kan ses som den blå vektor på figuren til højre, mens den modsatte vektor $-\vec{a}$ er vist med rødt. Koordinaterne til den modsatte vektor er:

$$-\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

21 Parallelle vektorer

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, hvis de har **samme eller modsat retning**. Symbolsk skrives parallelitet med to lodrette streger $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

22 Øvelse

Tre vektorer er givet ved $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$

a. Tegn en geometrisk fremstilling af vektorerne $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ og $\vec{v} + \vec{w}$

23 Øvelse

Tre vektorer er givet ved $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$

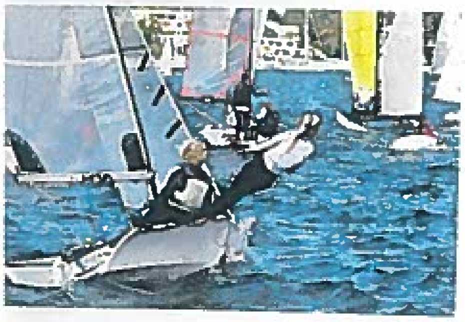
a. Beregn koordinaterne for vektorerne $\vec{u} + \vec{v}$, $\vec{u} + \vec{w}$ og $\vec{v} + \vec{w}$

24 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$

a. Bestem koordinaterne til vektorerne $3\vec{a}$, $4\vec{b}$ og $-2\vec{b}$

b. Bestem koordinaterne til vektoren $2\vec{a} + 3\vec{b}$



5.3 Vektorregneregler 2

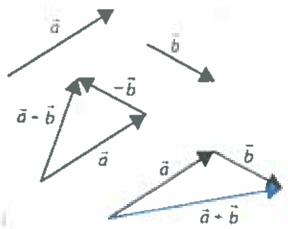
25 Introduktion

Gymnasieeleverne i sejljollen får vinden ind fra siden. Derved skubbes jollen sidelæns, samtidigt med at den sejler fremad. Endvidere flytter vandmassen sig på grund af havstrømme. Jollens retning henover bunden findes som resultatet af påvirkningen af alle de kræfter, der virker på båden. Det kan man bruge vektorer til at beregne.

I det her afsnit skal vi se på nogle af de regneregler, der gælder for regning med vektorer. Der er både en geometrisk repræsentation og en analytisk/symbolsk repræsentation af reglerne.

26 Definition

Differensen mellem to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er en ny vektor, der er defineret som summen af vektor $\vec{a}$ og den modsatte vektor af vektor $\vec{b}$, dvs. $\vec{a}-\vec{b}=\vec{a}+(-\vec{b})$.



27 Eksempel

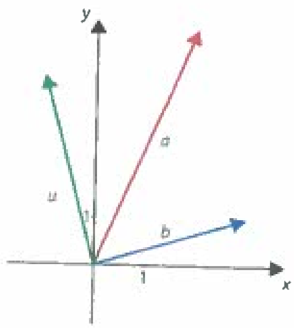
Øverst i kvadratnettet ses to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$.
Summen af de to vektorer, $\vec{a}+\vec{b}$, er vist med blåt.
Differensen findes, ifølge definitionen, ved at fremstille summen $\vec{a}+(-\vec{b})$, som er vist med grønt.

28 Sætning

Koordinaterne til $\vec{a}-\vec{b}$ er differensen af de to vektorers respektive koordinater.

Hvis vektorerne er $\vec{a}=\begin{pmatrix}a_1\\a_2\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}b_1\\b_2\end{pmatrix}$, har differensen koordinaterne

$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}a_1-b_1\\a_2-b_2\end{pmatrix}$.



29 Eksempel

Differensen af vektorerne $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$ er vektoren

$\vec{a}-\vec{b}=\begin{pmatrix}2-3\\5-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

I Geogebra kan vektordifferensen bestemmes ved at indføre vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ med kommandoerne "*a*=vektor[(2,5)]" og "*b*=vektor[(3,1)]". Herefter skrives "*a*–*b*" i inputlinjen.
Programmet svarer med vektor *u*, hvis koordinater er $\begin{pmatrix}-1\\4\end{pmatrix}$.

30 Sætning

Der gælder følgende **regneregler for vektorer**:

1. $\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$
2. $(\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c} = \vec{a} + (\vec{b} + \vec{c})$
3. $k(\vec{a} + \vec{b}) = k\vec{a} + k\vec{b}$
4. $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$
5. $(km)\vec{a} = k(m\vec{a})$

31 Bevis for sætning 30.4

Vi skal bevise, at $(k + m)\vec{a} = k\vec{a} + m\vec{a}$. Vi udregner koordinaterne på begge sider af lighedstegnet og ser, om de er ens.

Venstre side: $(k+m)\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (k+m)a_1 \\ (k+m)a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + ma_1 \\ ka_2 + ma_2 \end{pmatrix}$

Højre side: $k\vec{a} + m\vec{a} = k\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} + m\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 \\ ka_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} ma_1 \\ ma_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ka_1 + ma_1 \\ ka_2 + ma_2 \end{pmatrix}$

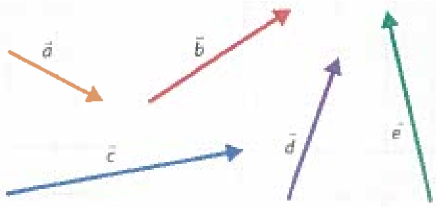
Vi får samme resultat, og dermed er sætningen bevist.

32 Eksempel

To vektorer er givet ved $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 5 \end{pmatrix}$. Vi vil udregne $3\vec{u} - 3\vec{v}$.

Ifølge regneregel 30.3 er dette lig med: $3(\vec{u} - \vec{v}) = 3\begin{pmatrix} 2-(-4) \\ 4-5 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 6 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 \\ -3 \end{pmatrix}$

33 Øvelse



På kvadratnettet ses fem vektorer. Vektorerne $\vec{c}$, $\vec{d}$ og $\vec{e}$ er fremkommet som resultater af udregningerne:
$\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{b} - \vec{a}$ og $\vec{b} - 2\vec{a}$.

a. Tegn vektor $\vec{a}$ og $\vec{b}$ på kvadreret papir.
b. Vis de tre udregninger geometrisk og gør på den måde rede for, hvilke af vektorerne $\vec{c}$, $\vec{d}$ og $\vec{e}$ der er resultater af hver af de tre udregninger.
c. Hvert kvadrattern udgør én enhed. Angiv koordinaterne til de fem vektorer.

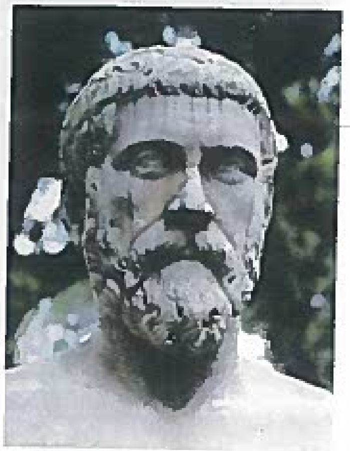
34 Øvelse

Tre vektorer er givet ved $\vec{u} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ og $\vec{w} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \end{pmatrix}$

a. Beregn koordinaterne for vektorerne $\vec{u} - \vec{v}$, $\vec{u} - \vec{w}$ og $\vec{v} - \vec{w}$.

35 Øvelse

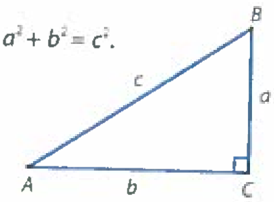
a. Bevis en eller flere af de øvrige regler i sætning 30 ved at udregne koordinaterne på begge sider af lighedstegnet og kontrollere, at de er ens.



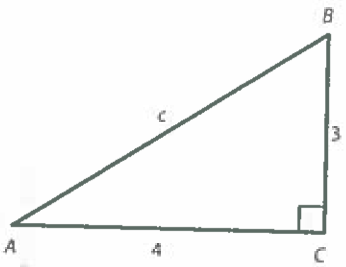
5.4 Længde af vektor

36 Introduktion

Pythagoras fra øen Samos har lagt navn til sætningen $a^2 + b^2 = c^2$.
Siden c er hypotenusen: Den side, som ligger over for den rette vinkel.



Vi kan udregne længden af en vektor med en formel, der bygger på Pythagoras' sætning. Vi starter derfor med at genopfriske brugen af Pythagoras' sætning.



37 Eksempel

De to kateter $a = BC$ og $b = AC$ i trekant ABC har længderne 3 og 4. Vi vil først omforme Pythagoras' sætning, $a^2 + b^2 = c^2$, så størrelsen c bliver isoleret. Da a, b og c er længder og dermed positive tal, kan vi tage kvadratroden på begge sider af lighedstegnet.

Vi får: $c = \sqrt{a^2 + b^2}$

Vi indsætter nu de kendte sidelængder for a og b og får: $c = \sqrt{3^2 + 4^2} = 5$.
Længden af hypotenusen er altså 5.

Der gælder en næsten tilsvarende formel til beregning af en vektors længde:

38 Sætning

Længden af en vektor $\vec{v} = \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$ er givet ved formlen $|\vec{v}| = \sqrt{v_1^2 + v_2^2}$.

39 Eksempel

Længden af vektoren $\vec{v} = \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}$ kan udregnes ved indsættelse i **længdeformlen**, sætning 38.

Vær opmærksom på, at fortegnet af x-koordinaten også skal sættes i anden, så vi sætter en parentes om -4: $|\vec{v}| = \sqrt{(-4)^2 + 3^2} = \sqrt{25} = 5$.

Vektor $\overrightarrow{AB}$, som er udspændt mellem punkt A og B, har koordinatene $\overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} b_1 - a_1 \\ b_2 - a_2 \end{pmatrix}$.
I forlængelse af sætning 38 gælder derfor tilsvarende:

40 Sætning

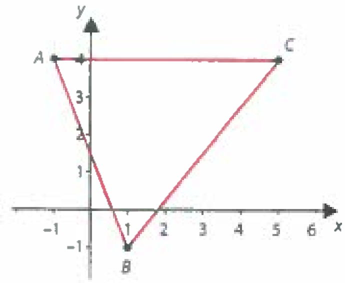
Længden af vektoren udspændt af punkterne A og B med koordinaterne (a_1, a_2) og (b_1, b_2) er givet ved formlen: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1 - a_1)^2 + (b_2 - a_2)^2}$.

41 Eksempel

Længden af vektor $\overrightarrow{AB}$, hvor $A(2,1)$ og $B(6,3)$ er: $|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(6-2)^2+(3-1)^2} = \sqrt{20} \approx 4,47$.

42 Eksempel

I trekant ABC har vinkelspidserne koordinaterne $A(-1,4)$, $B(1,-1)$ og $C(5,4)$.



Længden af siden AC er blot forskellen på førstekoordinaterne, da stykket er vandret. Sidelængderne AB og BC beregnes ved hjælp af sætning 40.

$$|\overrightarrow{AB}| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2} = \sqrt{(1-(-1))^2+(-1-4)^2} = \sqrt{2^2+(-5)^2} = \sqrt{29}$$

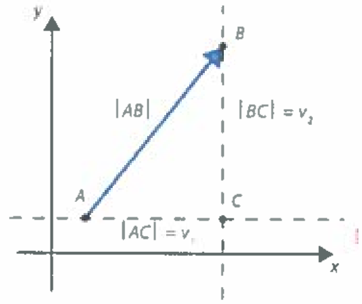
$$|\overrightarrow{BC}| = \sqrt{(c_1-b_1)^2+(c_2-b_2)^2} = \sqrt{(5-1)^2+(4-(-1))^2} = \sqrt{4^2+5^2} = \sqrt{41}$$

$$|\overrightarrow{AC}| = 5-(-1) = 6$$

43 Bevis for sætning 38

Vi ser først på en skrå vektor, $\vec{v}$, hvor begge koordinater, v_1 og v_2, er forskellige fra nul: Vi tegner linjer gennem vektorens endepunkter parallelt med koordinatsystemets akser. Vektorens endepunkter, A og B, danner sammen med linjernes skæringspunkt, C, en retvinklet trekant.

Vi anvender nu Pythagoras' sætning på trekant ABC:



$$|AB|^2 = |AC|^2 + |BC|^2 \quad \text{dvs.} \quad |\vec{v}|^2 = {v_1}^2 + {v_2}^2 \quad \text{og dermed}$$

$$|\vec{v}| = \sqrt{{v_1}^2+{v_2}^2}.$$

Herefter skal det vises, at formlen passer, hvis vektoren er lodret eller vandret. Scan evt. QR-koden, og se, hvordan man gør.

44 Øvelse

I trekant ABC, hvor C er en ret vinkel, er $a = 9$ og $b = 12$.

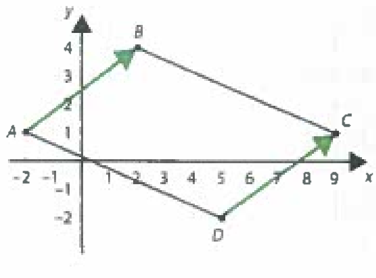
a. Beregn længden af hypotenusen.

45 Øvelse

a. Beregn længden af de to vektorer $\vec{v} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$.

46 Øvelse

I et parallelogram er to sider over for hinanden lige lange og parallelle.



a. Angiv koordinaterne til de fire punkter A, B, C og D.

b. Bestem koordinaterne til vektorerne $\overrightarrow{AB}$ og $\overrightarrow{DC}$.

c. Gør rede for, at firkant $ABCD$ er et parallelogram.

47 Øvelse

a. Bestem koordinaterne til en lodret vektor, $\vec{v}$, som har længden 5.

b. Bestem også længden af $\vec{v}$ ved indsættelse af de fundne koordinater i længdeformlen.

5.5 Skalarprodukt

48 introduktion

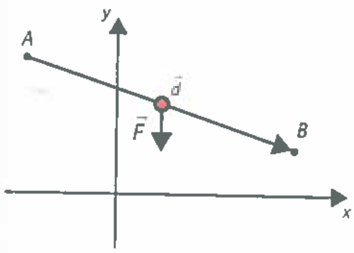
I afsnittet her skal vi indføre det såkaldte skalarprodukt af to vektorer. Det er et meget nyttigt redskab, hvormed man kan beregne det arbejde der udføres, når man kæmper med at løfte sig op imod tyngdekraften, fx når man cykler opad bakke.

49 Definition

Skalarproduktet af to vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ er et tal, der er givet ved $\vec{a} \cdot \vec{b} = (a_1 \cdot b_1 + a_2 \cdot b_2)$. Skalarproduktet kaldes også **prikproduktet**.

50 Eksempel

Prikproduktet af vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 9 \\ 10 \end{pmatrix}$ er tallet:
$\vec{a} \cdot \vec{b} = 7 \cdot 9 + 8 \cdot 10 = 863.$



51 Eksempel

På tegningen ses en model af en rød kugle, der påvirkes af tyngdekraften $\vec{F}$ og derfor ruller strækningen $\vec{d} = \overrightarrow{AB}$.

Fra fysikken ved vi, at det arbejde, W, en kraft, $\vec{F}$, udfører, når den virker over en strækning, $\vec{d}$, er lig prikproduktet af de to vektorer:

I en model lader vi tyngdekraften være $\vec{F} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix}$ og strækningen: $\vec{d} = \overrightarrow{AB} = \begin{pmatrix} 60 \\ -20 \end{pmatrix}$.

Det arbejde, som tyngdekraften udfører, kan beregnes ved skalarproduktet:

$$W = \vec{F} \cdot \vec{d} = \begin{pmatrix} 0 \\ -10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 60 \\ -20 \end{pmatrix} = 0 \cdot 60 + (-10) \cdot (-20) = 200$$

52 Sætning

Der gælder følgende regneregler for skalarprodukter:

1. $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}$ — **Den kommutative lov**
2. $\vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$ — **Den distributive lov**
3. $(k\vec{a}) \cdot \vec{b} = k(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (k\vec{b})$ — **Den associative lov**
4. $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

53 Eksempel

Vektoren $\vec{a} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}$ har længden 5, hvilket vi kan beregne således:

$|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + (-3)^2} = \sqrt{25} = 5.$

Hvis vi prikker $\vec{a}$ med sig selv, får vi ifølge regneregel 52.4:

$$\vec{a}^2 = \vec{a}\cdot\vec{a} = 4\cdot 4 + (-3)\cdot(-3) = 16+9 = 25\,.$$

Vi får altså længden i anden, i overenstemmelse med sætningens påstand. Sætningen passer derfor med de valgte tal i dette eksempel.

Hvis vi vil bevise, at sætningerne gælder generelt, dvs. for alle vektorer, må vi frigøre argumenterne for konkrete tal. Nedenfor vil vi bevise tre af sætningens påstande ved at regne med symbolske koordinater.

54 Bevis for sætning 52.1

Vi beviser påstanden ved at regne med koordinater på begge sider at lighedstegnet, og kontrollerer at vi får det samme.

Venstre side: $\vec{a}\cdot\vec{b} = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$

Højre side: $\vec{b}\cdot\vec{a} = b_1\cdot a_1 + b_2\cdot a_2 = a_1\cdot b_1 + a_2\cdot b_2$.

Vi kan bytte rundt på faktorerne, da alle størrelserne blot er tal (koordinater).
Da de to udregninger giver samme resultat, er sætningen bevist.

55 Bevis for sætning 52.2

Vi beviser igen påstanden ved at regne med koordinater på begge sider af lighedstegnet og kontrollerer, at vi får det samme.

På venstre side får vi: $\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c}) = a_1\cdot(b_1+c_1)+a_2\cdot(b_2+c_2) = a_1b_1+a_1c_1+a_2b_2+a_2c_2$.

På højre side får vi: $\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_1c_1 + a_2c_2$.

Begge udregninger ender med, at de samme 4 talstørrelser bliver adderet, og dermed er de lig med hinanden. Hermed er sætningen bevist.

56 Bevis for sætning 52.4

Vi skal bevise, at en vektor prikket med sig selv giver dens længde i anden:
$\vec{a}\cdot\vec{a} = |\vec{a}|^2$.
Længden af en vektor er givet ved: $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2+a_2^2}$ og dermed er længden i anden $|\vec{a}|^2 = a_1^2 + a_2^2$.
Vi prikker $\vec{a}$ med sig selv og ser, at vi får det samme: $\vec{a}\cdot\vec{a} = a_1\cdot a_1 + a_2\cdot a_2 = a_1^2 + a_2^2$.
Hermed er sætningen bevist.

57 Øvelse

Tre vektorer er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, $\vec{b}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{c}=\begin{pmatrix}5\\6\end{pmatrix}$.

a. Beregn prikprodukterne $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ og $\vec{a}\cdot\vec{c}$.

58 Øvelse

a. Bevis sandheden af det første lighedstegn i 52.3.

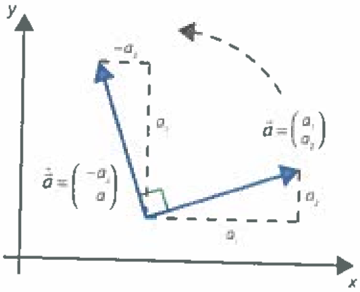
b. Bevis sandheden af det andet lighedstegn i 52.3.

5.6 Tværvektor og determinant

59 Introduktion

Trotsky-broen i Skt. Petersborg er ved at åbne broklappen. På billedet åbner den i samme retning som koordinatsystemets omløbsretning. Afstanden mellem broens endepunkt og vejbanen øges gradvist. Åbnes broen 90°, er afstanden lig med broens længde.

Den ovenstående tænkemåde kan vi bruge i afsnittet her, hvor vi skal starte med at se på begrebet tværvektor.



60 Definition

Tværvektoren til vektor $\vec{a}$ fremkommer ved at dreje $\vec{a}$ 90° i positiv omløbsretning. Tværvektoren betegnes $\hat{\vec{a}}$ og kaldes **"vektor a hat"**.

På illustrationen ses det, at når vektoren $\vec{a}$ drejes 90° i positiv omløbsretning, byttes der rundt på x- og y-koordinaterne, og der sættes et minus foran den nye x-koordinaten.

61 Sætning

Tværvektoren til en vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ **har koordinaterne** $\hat{\vec{a}}=\begin{pmatrix} -a_2 \\ a_1 \end{pmatrix}$.

62 Eksempel

Tværvektoren til $\vec{a}=\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}$ er ifølge sætning 61: $\hat{\vec{a}}=\begin{pmatrix} -(-3) \\ 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Tværvektoren er et nyttigt begreb i plangeometrien. Ved hjælp af tværvektorer er det eksempelvis meget let at skabe en vektor, som er vinkelret på en anden vektor.

Vi kan også anvende tværvektoren til at indføre endnu et nyttigt begreb, nemlig **determinanten** af et vektorpar.

63 Definition

Determinanten af vektorparret $\vec{a}=\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix}$ skrives $\det(\vec{a},\vec{b})$ og er givet ved: $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b} = a_1 \cdot b_2 - a_2 \cdot b_1$.

Determinanten kan også skrives: $\det(\vec{a},\vec{b}) = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 \\ a_2 & b_2 \end{vmatrix}$.

Skemaet har sin helt egen betydning, der kan ses på videoen.

64 Eksempel

Vi beregner determinanten for $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-5\\2\end{pmatrix}$:

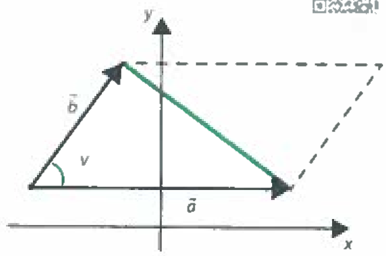
$$\det(\vec{a},\vec{b})=\begin{vmatrix}3 & -5\\4 & 2\end{vmatrix}=3\cdot 2-4(-5)=26$$

Determinanter har flere anvendelsesmuligheder, og vi skal se nærmere på en af dem her.

På tegningen ses to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænde et parallelogram (og dermed også en trekant).

Der gælder nu:

65 Sætning



Arealet A af det parallelogram, som vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, er lig med den numeriske værdi af determinanten af vektorparret:

$$A=|\det(\vec{a},\vec{b})|.$$

Tilsvarende er **arealet T af den trekant**, som vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ udspænder, lig med:

$$T=\frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|.$$

66 Eksempel

To vektorer $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ udspænder en trekant. Vi bestemmer dens areal:

$$T=\frac{1}{2}|\det(\vec{a},\vec{b})|=\frac{1}{2}\cdot\left|\begin{vmatrix}1 & 2\\3 & 4\end{vmatrix}\right|=\frac{1}{2}\cdot|1\cdot 4-3\cdot 5|=\frac{1}{2}\cdot|4-15|=\frac{1}{2}\cdot|-11|=\frac{11}{2}$$

67 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\1\end{pmatrix}$.

a. Bestem $\hat{\vec{a}}$ og $\hat{\vec{b}}$.

b. Tegn repræsentanter for de fire vektorer på kvadreret baggrund.

68 Øvelse

De to vektorer $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}1\\7\end{pmatrix}$ udspænder et parallelogram.

a. Bestem parallelogrammets areal.

69 Øvelse

De to vektorer $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b}=\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix}$ udspænder en trekant.

a. Bestem trekantens areal.

b. Tegn trekanten udspændt af de to vektorer i et koordinatsystem.

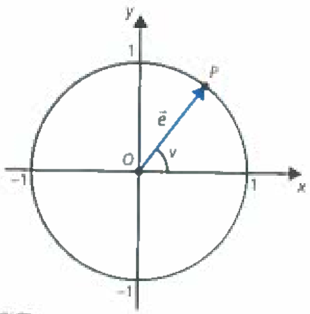
10. Vektorer og trigonometri

10.1 Polære koordinater og retningsvinkel

1 Introduktion

Ligesom en kompasnål viser en retning ved at dreje rundt i en cirkel, kan vi tale om en vektors retning i en cirkel.

Vi starter med at se på stedvektorer med længden 1.



2 Definition

En cirkel med centrum i origo $O(0,0)$ og radius 1 kaldes en **enhedscirkel**.

Vektoren $\vec{e} = \overrightarrow{OP}$ er tegnet fra centrum til periferien i enhedscirklen, så dens længde er 1.

En vektor med længden 1 kaldes en **enhedsvektor**.

Vinklen v, der dannes mellem førsteaksen og vektoren $\overrightarrow{OP}$, kaldes vektorens **retningsvinkel**. Som vi vender tilbage til, regnes vinkler som positive mod urets retning og negative med.

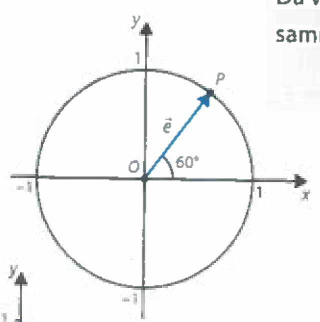
Punktet P kaldes et **retningspunkt** for vinklen v.

Koordinaterne til punktet P og til vektoren $\overrightarrow{OP}$ vil ændre sig, når vinklen v ændres. Vi vil nu indføre funktioner, som beregner x- og y-koordinaterne som funktion af vinklen v.

3 Definition

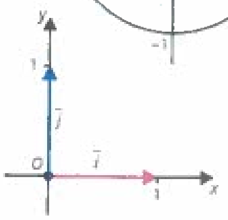
De to funktioner **cos(v) og sin(v) defineres som koordinaterne til vinklens retningspunkt**: $P(\cos(v), \sin(v))$.

Da vektor $\overrightarrow{OP}$ er stedvektor til retningspunktet P for vinklen v, har enhedsvektoren $\overrightarrow{OP}$ samme koordinater som P:
$$\overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} \cos(v) \\ \sin(v) \end{pmatrix}$$



4 Eksempel

Koordinaterne til retningspunktet for en vinkel på 60° er: $P(\cos(60), \sin(60))$.
Angivet med 2 decimaler: $P(0{,}50; 0{,}87)$.
Stedvektoren $\vec{e} = \overrightarrow{OP}$ har samme koordinater som punktet P: $\vec{e} = \overrightarrow{OP} = \begin{pmatrix} 0{,}50 \\ 0{,}87 \end{pmatrix}$

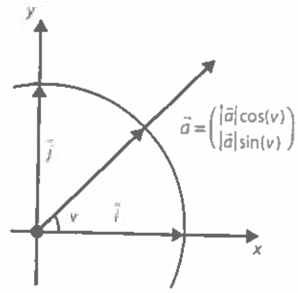


5 Eksempel

De to vektorer $\vec{i} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ og $\vec{j} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ har også længden 1.
De kaldes koordinatsystemets **basisvektorer**.

6 Polære koordinater

Alle vektorer kan beskrives ud fra deres længde og deres retningsvinkel.

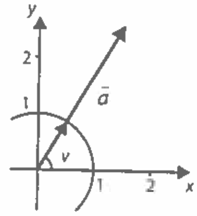


En vektor $\vec{a}$ danner vinklen v med førsteaksen. Hvis $\vec{a}$ har længden $|\vec{a}|$ skal vi blot gange enhedsvektorens koordinater med denne længde for at få koordinaterne til $\vec{a}$.

Koordinaterne til vektor $\vec{a}$ er dermed: $\vec{a}=\begin{pmatrix}|\vec{a}|\cos(v)\\|\vec{a}|\sin(v)\end{pmatrix}$

Det polære koordinatsæt til $\vec{a}$ skrives $\left(|\vec{a}|\,,\,v\right)$

7 Eksempel

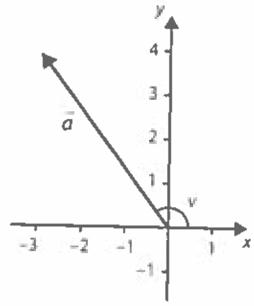


De polære koordinater til en vektor $\vec{a}$ med en retningsvinklen på 59°,

og som har længden 3, er: $\vec{a}$ = (3,59)

8 Eksempel

En vektor er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$. Vi vil beregne dens retningsvinkel.



Vi udregner først længden af $\vec{a}=\sqrt{(-3)^2+4^2}=5$

Vi ved nu, at $\vec{a}=\begin{pmatrix}|\vec{a}|\cos(v)\\|\vec{a}|\sin(v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}5\cos(v)\\5\sin(v)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-3\\4\end{pmatrix}$

Vi kan beregne retningsvinklen ud fra x-koordinatligningen: $5\cos(v)=-3$.
Først divideres med 5 på begge sider af lighedstegnet. Vi har da $\cos(v)=-\frac{3}{5}$.
Vi kan beregne dette tal i CAS med den indbyggede funktion $\cos^{-1}$.
Vi finder, at $v=\cos^{-1}\left(-\frac{3}{5}\right)=126{,}87°$.

9 Øvelse

a. Beregn koordinaterne til retningspunkterne P_{30} og P_{135} for vinklerne 30° og 135°, angiv facit med 2 decimaler.

10 Øvelse

a. Beregn koordinaterne til enhedsvektoren $\vec{e_{45}}$ med retningsvinklen 45°, angiv facit med 2 decimaler.

11 Øvelse

a. Opskriv det polære koordinatsæt til den vektor $\vec{a}$, der har retningsvinklen 50° og længden 4.
b. Beregn de almindelige koordinater til $\vec{a}$.

12 Øvelse

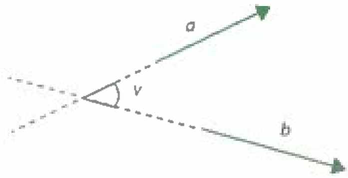
En vektor er givet ved $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\8\end{pmatrix}$.

a. Beregn længden af vektor $\vec{a}$.
b. Beregn retningsvinklen til $\vec{a}$, angiv facit med 1 decimal.

10.2 Vinkler mellem to vektorer

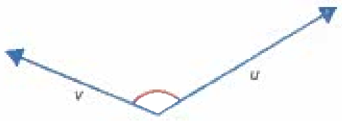
13 Eksempel

Flyenes varme udstødningsgasser danner iskrystaller, som hænger i luften og viser flyenes flyvevinkel i forhold til hinanden.



I dette afsnit skal vi se på vinklen mellem to vektorer. Tænkemåden minder en del om de spor, som flyene trækker efter sig på himlen.

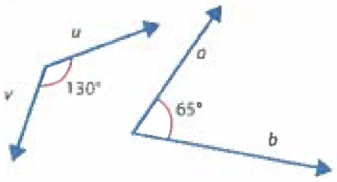
Vi starter med at præcisere, hvordan vi skal forstå vinklen mellem to vektorer.



14 Definition

Vinklen mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$ skriver vi symbolsk på denne måde: $\angle(\vec{a},\vec{b})$.
Vektorvinklen er altid den mindste af de to vinkler, som to vektorer danner, når de afsættes fra samme punkt.
$\angle(\vec{a},\vec{b})$ er større end eller lig med 0° og mindre end eller lig med 180°.

Nulvektoren, $\vec{o}$, danner ikke en vinkel med nogen vektor.

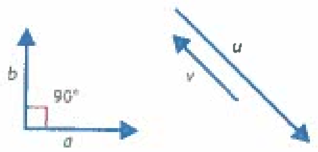


15 Eksempel

$(\vec{a},\vec{b}) = 65°$ og $(\vec{u},\vec{v}) = 130°$.

16 Definition

To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ siges at være **parallelle**, hvis der findes et tal k, så $\vec{b} = k\vec{a}$, vi skriver $\vec{a} \parallel \vec{b}$.
To vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$ siges at være **ortogonale**, hvis vinklen mellem dem er 90°, vi skriver $\vec{a} \perp \vec{b}$.



17 Eksempel

På tegningen ses vektorerne $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{u}$ og $\vec{v}$. Vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er ortogonale. Vektorerne $\vec{u}$ og $\vec{v}$ er parallelle, og der vil derfor eksistere en konstant k, så $\vec{u} = k\vec{v}$. Da $\vec{u}$ er dobbelt så lang og modsat rettet $\vec{v}$, kan vi indse, at $k = -2$. Altså at $\vec{u} = -2\vec{v}$.

Der gælder en meget nyttig sætning om sammenhængen mellem to vektorers skalarprodukt og vinklen mellem dem. Det skal vi se nærmere på nu.

18 Sætning

Vinklen, v, mellem vektor $\vec{a}$ og vektor $\vec{b}$, er givet ved:

$$\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|} \quad \text{og dermed:} \quad v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right).$$

Sætningen bevises i afsnit 10.8.

19 Eksempel

Vi vil beregne vinklen v mellem vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Det gør vi ved at beregne skalarproduktet og længden af de to vektorer og indsætte alle tre størrelser i formlen i sætning 18. Her er det vigtigt at undgå afrundinger undervejs, da der skal regnes videre med tallene. For at undgå dette problem, kan man blot udregne det hele på en gang.

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}}{\sqrt{2^2+1^2}\cdot\sqrt{3^2+(-1)^2}}\right) = \cos^{-1}\left(\frac{5}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{10}}\right) = 45^\circ$$

I CAS kan vi udnytte indbyggede kommandoer til beregning af henholdsvis skalarprodukt og længde.

Først defineres de to vektorer $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og vi skriver så :

$$v = \cos^{-1}\left(\frac{dotp(\vec{a},\vec{b})}{norm(\vec{a})\cdot norm(\vec{b})}\right)$$

20 Sætning

Skalarproduktet af $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er lig med nul netop i de tilfælde, hvor vektorerne er ortogonale. Så hvis vektorerne er ortogonale, da er skalarproduktet lig med nul, og hvis skalarproduktet lig med nul, så er vektorerne ortogonale. Vi skriver:

$\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$ er ensbetydende med, at $v = 90°$.

21 Bevis for sætning 20

Vi tager udgangspunkt i formlen fra sætning 18: $\cos(v) = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|}$.

Hvis $v = 90°$, så er $\cos(v) = 0$, og dermed er venstre side lig med nul. Hvis højresiden skal give nul, må det være tælleren med skalarproduktet, der er lig med nul. Altså: hvis $v = 90°$, så er $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$.

Omvendt, hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, så er højresiden lig med nul. Og venstresiden, $\cos(v)$, er kun lig med nul for $v = 90°$, når v er vinklen mellem $\vec{a}$ og $\vec{b}$. Derfor: hvis $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0$, så er $v = 90°$. Dermed er beviset slut.

22 Øvelse

a. Bestem vinklen mellem vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix}$, og angiv svaret med 1 decimal.

23 Øvelse

a. Undersøg, om vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} -5 \\ 2 \end{pmatrix}$ er ortogonale.

24 Øvelse

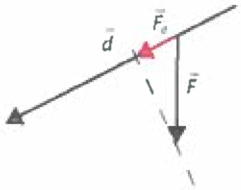
a. Undersøg, om vektorerne $\vec{a} = \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \end{pmatrix}$ er ortogonale eller parallelle.

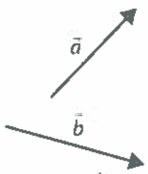
10.3 Projektion

25 Introduktion

Hvis bremsen slippes, vil tyngdekraften sørge for, at gondolen på billedet vil bevæge sig nedad med stor hastighed. Hvis kablerne hang stejlere, ville det gå endnu hurtigere. Helt lodret ville tyngdekraften få fuld virkning, og gondolen ville være i frit fald.

Tegningen er en model over situationen med gondolen. Tyngdekraften er repræsenteret af vektor $\vec{F}$, og kørselsretningen af vektor $\vec{d}$. Den lille røde vektor $\vec{F_d}$ er den del af tyngdekraften $\vec{F}$, der går i kørselsretningen $\vec{d}$.



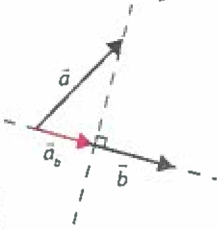


I afsnittet her skal vi se nærmere på, hvor stor en del af en vektors retning der kan overføres til en anden retning. Man kalder $\vec{F_d}$ for projektionen af vektor $\vec{F}$ på vektor $\vec{d}$.

26 Definition

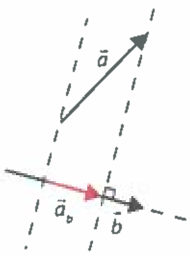
Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ findes ved at afsætte vektorerne ud fra samme punkt. Herefter projiceres $\vec{a}$'s endepunkt vinkelret ned på linjen, der går gennem $\vec{a}$.

Projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ skrives $\vec{a}_b$.



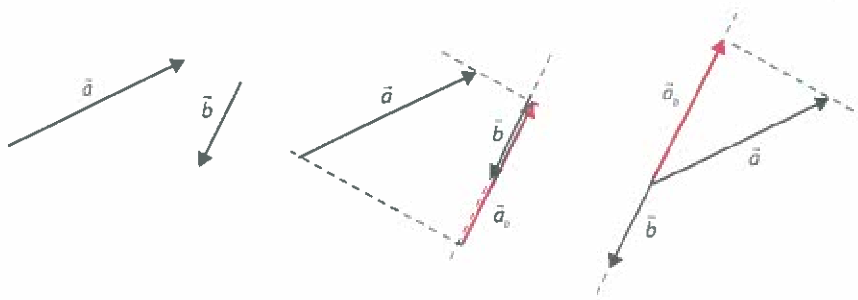
27 Eksempel

Projektionen $\vec{a}_b$ kan også konstrueres ved at tegne parallelle linjer gennem $\vec{a}$'s begyndelses- og endepunkt vinkelret ned på linjen, der går gennem $\vec{b}$.



28 Eksempel

Her ses endnu et eksempel på geometrisk konstruktion af en projektion $\vec{a}_b$ af en vektor $\vec{a}$ på en vektor $\vec{b}$ på de to måder. Begge måder giver naturligvis samme resultat.



Der findes en formel, hvormed man kan beregne koordinaterne til projektionsvektoren. Den skal vi se på her.

29 Sætning

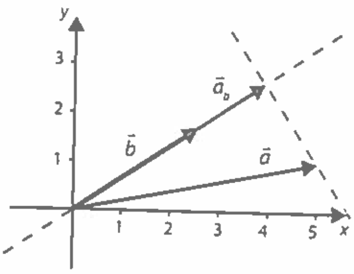
Koordinaterne til projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$\vec{a}_b = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}$$

30 Eksempel

Vi beregner koordinaterne til $\vec{a}_b$, hvor $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$ ved hjælp af sætning 29:

$$\vec{a}_b = \frac{\begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}}{\left|\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\right|^2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{15+2}{3^2+2^2}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \frac{17}{13}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{51}{13}\\ \frac{34}{13}\end{pmatrix}$$



Længden af projektionsvektoren kan naturligvis beregnes med længdeformlen, når man først har fundet dens koordinater med ovenstående formel. Men der er en lettere måde, som fremgår af følgende sætning.

31 Sætning

Længden af projektionen af $\vec{a}$ på $\vec{b}$ er givet ved:

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|}$$

32 Eksempel

Vi beregner længden af projektionen af $\vec{a} = \begin{pmatrix}5\\1\end{pmatrix}$ på $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$, hvis koordinater vi fandt ovenfor:

$$|\vec{a}_b| = \frac{|\vec{a}\cdot\vec{b}|}{|\vec{b}|} = \frac{|17|}{\sqrt{3^2+2^2}} = \frac{17}{\sqrt{13}} \approx 4{,}7$$

33 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}3\\0\end{pmatrix}$.

a. Tegn vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og konstruer projektionen $\vec{a}_b$ på tegningen.

b. Bestem koordinaterne til $\vec{a}_b$.

34 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix}-1\\2\end{pmatrix}$.

a. Tegn vektorerne $\vec{a}$ og $\vec{b}$, og konstruer projektionen $\vec{a}_b$ på tegningen.

b. Bestem koordinaterne til $\vec{a}_b$.

c. Bestem længden af $\vec{a}_b$.

10.4 Determinant af et vektorpar

35 Introduktion

På billedet ses Gottfried Wilhelm Leibnitz 1646-1716, der opfandt determinant-begrebet og undersøgte og beskrev dets egenskaber. En af dets allervigtigste anvendelser er i løsninger af systemer af ligninger, hvoraf det enkleste er to ligninger med to ubekendte.

Vi har tidligere, i afsnit 5.6, set på, hvordan man ved hjælp af determinanter kan udregne arealer af parallelogrammer og trekanter udspændt af to vektorer.

Vi skal her se på nogle sætninger om determinanter og på, hvordan determinanter også kan bruges til bestemmelse af vektorers placering i forhold til hinanden.

I modsætning til skalarproduktet kan man ikke uden videre bytte rundt på rækkefølgen, når man tager determinanten til to vektorer. Hvis rækkefølgen ændres, skifter determinanten fortegn:

36 Sætning

Der gælder følgende regneregel for determinanten af et vektorpar $\vec{a}$ og $\vec{b}$:
$\det(\vec{a},\vec{b}) = -\det(\vec{b},\vec{a})$.

37 Bevis for sætning 36

Vi udregner determinanterne på hver side af lighedstegnet:
Venstre side: $\det(\vec{a},\vec{b}) = a_1b_2 - a_2b_1$
Højre side: $-\det(\vec{b},\vec{a}) = -(b_1a_2 - b_2a_1) = -b_1a_2 + b_2a_1 = a_1b_2 - a_2b_1$
Vi får det samme resultat i begge udregninger og har dermed vist det, vi skulle.

En væsentlig egenskab ved determinanten er, at den kan bruges til at afgøre, om to vektorer er parallelle.

38 Sætning

$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$ er ensbetydende med, at $\vec{a} \parallel \vec{b}$.

39 Bevis for sætning 38

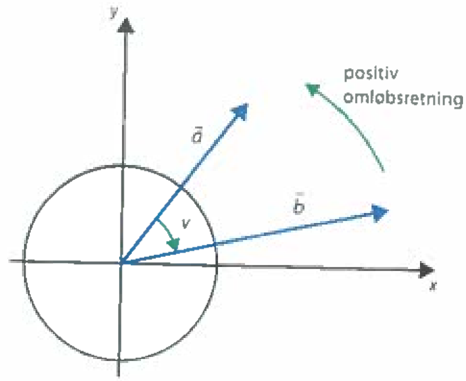
Determinanten er defineret ved $\det(\vec{a},\vec{b}) = \hat{\vec{a}} \cdot \vec{b}$. Derfor ved vi, ifølge sætning 20, at hvis determinanten er lig med nul, så er $\hat{\vec{a}}$ og vektor $\vec{b}$ ortogonale. Men i så fald er $\vec{a}$ og $\vec{b}$ parallelle.
Og omvendt, hvis $\vec{a}$ og $\vec{b}$ er parallelle, så er $\hat{\vec{a}}$ og vektor $\vec{b}$ ortogonale, og i så fald er deres skalarprodukt lig med nul og dermed $\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$. Hermed er beviset slut.

40 Eksempel

Vi vil afgøre, om vektorerne $\vec{u} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{v} = \begin{pmatrix} 6 \\ -3 \end{pmatrix}$ er parallelle og bestemmer determinanten af vektorparret:

$$\det(\vec{u},\vec{v}) = \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = (-2)\cdot(-3) - 1\cdot 6 = 6 - 6 = 0$$

Da $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$, er vektorerne ifølge sætning 38 parallelle.



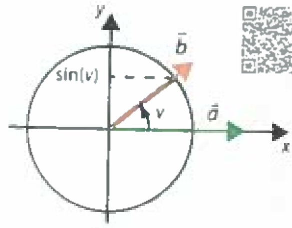
Determinanter kan også forbindes med vinkler, som det fremgår af nedenstående sætning.

Sætningen bevises senere ved at bruge **polære koordinater**, og derfor gælder sætningen kun, når vi regner med "orienterede" vinkler.
Dvs. at vinklen v i sætningen skal forstås som vinklen *fra a* til *b* og ikke *mellem* $\vec{a}$ og $\vec{b}$. På illustrationen er vinklen *fra* $\vec{a}$ til $\vec{b}$ altså negativ, fordi vi går *imod* den positive omløbsretning, for at komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$.

41 Sætning

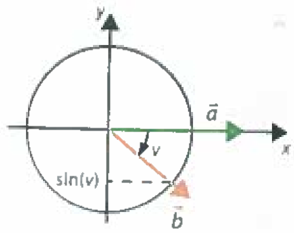
Når v betegner vinklen fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, kan **determinanten af vektorparret** skrives:

$$\det(\vec{a},\vec{b}) = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \cdot \sin(v)$$



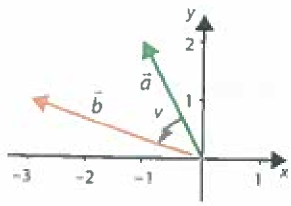
Determinantens fortegn fortæller dermed noget om, hvor $\vec{a}$ ligger i forhold til $\vec{b}$:
Hvis $\det(\vec{a},\vec{b})$ er negativ, skal man åbenbart gå *imod* omløbsretningen for at komme fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$, når vektorerne afsættes med samme begyndelsespunkt.
Når vinklen v fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$ er negativ, bliver sinus til vinklen, $\sin(v)$, også negativ grundet den måde som $\sin(v)$ er defineret i forhold til enhedscirklen.

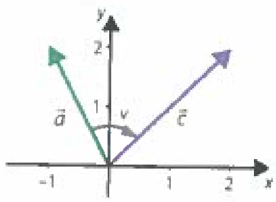
Vinklen v fra $\vec{a}$ til $\vec{b}$	Sinus	Determinanten
$0° < v < 180$	$\sin(v) > 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) > 0$
$v = 0°$ eller $v = 180°$	$\sin(v) = 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) = 0$
$-180° < v < 0°$	$\sin(v) < 0$	$\det(\vec{a},\vec{b}) < 0$



42 Eksempel

Lad der være givet tre vektorer $\vec{a} = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$, $\vec{b} = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ og $\vec{c} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$.
Vi beregner determinanterne $\det(\vec{a},\vec{b}) = 5$ og $\det(\vec{a},\vec{c}) = -6$.
Da $\det(\vec{a},\vec{b})$ er positiv, er vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$ også positiv.
Da $\det(\vec{a},\vec{c})$ er negativ, er vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{c}$ også negativ.





43 Øvelse

To vektorer er givet ved $\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ og $\vec{b} = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

a. Udregn $\det(\vec{a},\vec{b})$, og gør rede for fortegnet af vinklen *fra* $\vec{a}$ *til* $\vec{b}$.