

Bevis - løsning af den logistiske differentiaalligning

Sætning

Den logistiske differentiaalligning

$$\frac{dy}{dx} = a \cdot y \cdot (M - y)$$

hvor $a, M > 0$, har for $0 < y < M$ løsningerne

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-aMx}}$$

hvor $c > 0$.

Bevis

Vi ser, at differentiaalligningen er på formen

$$\frac{dy}{dx} = h(x) \cdot g(y)$$

hvor $h(x) = a$ og $g(y) = y \cdot (M - y)$. Vi har desuden antaget, at $0 < y < M$. Det vil sige, at både $y > 0$ og $M - y > 0$. Derfor er også $g(y) = y \cdot (M - y) > 0$. Endelig er både $h(x) = a$ og $g(y) = y \cdot (M - y)$ kontinuerte funktioner og betingelserne for at benytte separation af de variable er således opfyldte.

At løse den logistiske differentiaalligning svarer således til at løse ligningen

$$\int \frac{1}{y \cdot (M - y)} dy = \int a dx$$

Integranden på venstre side kan omskrives idet, der gælder (se nedenfor)

$$\frac{1}{y \cdot (M - y)} = \frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)}$$

Det vil sige, at vi nu har

$$\int \frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)} dy = \int a dx$$

Og ved hjælp af sumreglen for ubestemt integration fås

$$\int \frac{1}{M \cdot y} dy + \int \frac{1}{M \cdot (M - y)} dy = \int a dx$$

Konstantreglen giver

$$\frac{1}{M} \cdot \int \frac{1}{y} dy + \frac{1}{M} \cdot \int \frac{1}{(M-y)} dy = \int a dx$$

Vi finder nu stamfunktionerne:

$$\frac{1}{M} \cdot \ln(|y|) - \frac{1}{M} \cdot \ln(|M-y|) = ax + k_1,$$

hvor k_1 er en konstant. Da $y > 0$ og $M - y > 0$ kan numerisktegnene udelades, og idet vi sætter $-\frac{1}{M}$ uden for en parentes fås

$$-\frac{1}{M}(\ln(M-y) - \ln(y)) = ax + k_1$$

Ved at gange med $-M$ på begge sider har vi

$$\ln(M-y) - \ln(y) = -a \cdot M \cdot x - M \cdot k_1$$

Sætter vi $k_2 = -M \cdot k_1$ og udnytter logaritmeregnereglen $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln(a) - \ln(b)$ kan vi skrive

$$\ln\left(\frac{M-y}{y}\right) = -a \cdot M \cdot x + k_2$$

Idet vi laver potensopløftning med e som grundtal på begge sider og husker at $e^{\ln(x)} = x$ får vi

$$\frac{M-y}{y} = e^{-a \cdot M \cdot x + k_2}$$

På venstreside af lighedstegnet divideres y op i hvert led, mens vi på højreside bruger potensregnereglen $a^{p+q} = a^p \cdot a^q$:

$$\frac{M}{y} - 1 = c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x} \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{M}{y} = 1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}$$

hvor $c = e^{k_2}$ er en positiv konstant. Vi ganger nu med y på begge sider af lighedstegnet og får

$$M = y \cdot (1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x})$$

og da $1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x} > 0$ kan vi dividere med denne størrelse og får

$$y = \frac{M}{1 + c \cdot e^{-a \cdot M \cdot x}}$$

hvilket netop var det, vi skulle vise 😊

□

For en god ordens skyld må vi hellere vise at følgende omskrivning er korrekt:

$$\frac{1}{y \cdot (M - y)} = \frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)}$$

Vi omskriver udtrykket på højre side ved at sætte på fælles brøkstreg. Bemærk, at en fællesnævner må være $M \cdot y \cdot (M - y)$. Det vil sige, at den første brøk forlænges med $M - y$, mens den anden forlænges med y :

$$\frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)} = \frac{1 \cdot (M - y)}{M \cdot y \cdot (M - y)} + \frac{1 \cdot y}{M \cdot y \cdot (M - y)}$$

Da der nu er fællesnævner fås

$$\frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)} = \frac{(M - y) + y}{M \cdot y \cdot (M - y)} = \frac{M}{M \cdot y \cdot (M - y)}$$

Og da M forkorter ud i tæller og nævner ender vi med

$$\frac{1}{M \cdot y} + \frac{1}{M \cdot (M - y)} = \frac{1}{y \cdot (M - y)}$$

hvilket var det ønskede.