

Det giver

$$\Delta m \approx 7\Delta t - 0,04m(t)\Delta t \Leftrightarrow \frac{\Delta m}{\Delta t} \approx 7 - 0,04m(t).$$

Tilnærmelsen bliver bedre og bedre, når  $\Delta t$  nærmer sig 0, og da

$$\lim_{\Delta t \rightarrow 0} (7 - 0,04m(t)) = 7 - 0,04m(t),$$

har vi differentialligningen  $m'(t) = 7 - 0,04m(t)$ . Vi genkender ligningen, som den der beskriver forskudt eksponentiel vækst, og får med sætning 2 følgende forskrift for  $m(t)$ :

$$m(t) = 175 + ke^{-0,04t}.$$

Konstanten  $k$  afhænger af medicinmængden til tiden  $t = 0$ . Da

$$ke^{-0,04t} \rightarrow 0 \quad \text{når} \quad t \rightarrow \infty$$

ser vi, at mængden af medicin i kroppen på sigt vil stabilisere sig ved omkring 175 milliliter.

## 5.10 NUMERISK LØSNING

For de differentialligninger, vi indtil nu har set på, har det været muligt for et givet begynderpunkt  $(x_0, y_0)$  ved beregning at bestemme forskriften for den løsningskurve, der går igennem dette punkt.

Det er imidlertid de færreste differentialligninger, der har en sådan *analytisk løsning*, dvs. en løsning, der kan udledes og udtrykkes med de sædvanlige funktioner. Langt de fleste differentialligninger, man møder i videnskaberne, er så komplicerede, at man må nøjes med en såkaldt *numerisk løsning*.

Ved en numerisk løsning forstår man en løsning i form af en række punkter

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

hvor man kun ved, at de tilnærmelsesvist ligger på løsningskurven gennem  $(x_0, y_0)$ . Afsættede punkterne i et koordinatsystem fås et indtryk af løsningskurvens grafiske forløb, men en forskrift for løsningskurven kan man ikke bestemme ud fra den numeriske løsning.

I anvendelser er det naturligvis afgørende, at en numerisk løsning ikke afviger alt for meget fra den egentlige løsning, og der findes metoder, der giver numeriske løsninger med stor præcision. De bedste metoder er også de mest komplicerede at anvende. Her vil vi nøjes med at se på den simple, men også noget upræcise, *Eulers metode*.

EULERS I

Vi ser på

hvor  $q(x,$   
igennem

Vi søger

hvor vi vi  
grafen for

Vi bestem

Ligninger

Den ligni  
 $(x_0, y_0)$  li  
ferentialli

Vi vælger

Tallet  $y_1$   
 $x_1$  tæt på  
 $(x_0, y_0)$ .  
er en diff

**EULERS METODE**

Vi ser på differentialligningen

$$y' = q(x, y),$$

hvor  $q(x, y)$  er et kendt udtryk i  $x$  og  $y$ , og ønsker en tilnærmelse til den løsning  $f(x)$ , der går igennem punktet  $(x_0, y_0)$ .

Vi søger med andre ord en numerisk løsning

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n),$$

hvor vi vil stille os tilfredse, hvis punkterne  $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$  blot tilnærmelsesvist er på grafen for  $f(x)$ .

Vi bestemmer først punktet  $(x_1, y_1)$ :

Ligningen for tangenten til grafen for  $f$  i punktet  $(x_0, y_0)$  er givet ved

$$y = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

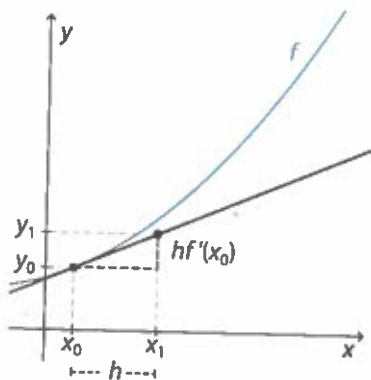
Den ligning kan vi bestemme, selvom vi ikke kender forskriften for  $f$ . Vi udnytter, at punktet  $(x_0, y_0)$  ligger på grafen for  $f$  til at bestemme tallet  $f(x_0)$ . Og da funktionen  $f$  er løsning til differentialligningen, kan vi også bestemme tallet  $f'(x_0)$ :

$$f(x_0) = y_0 \quad \text{og} \quad f'(x_0) = q(x_0, f(x_0)) = q(x_0, y_0).$$

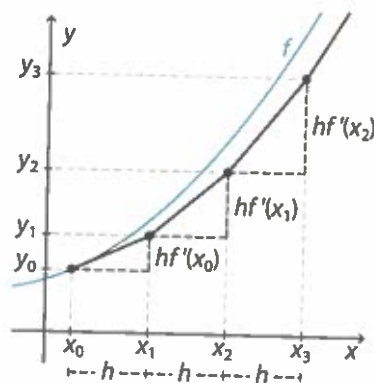
Vi vælger nu en fast lille *skridtlængde*  $h$  og bestemmer  $x_1$  som

$$x_1 = x_0 + h.$$

Tallet  $y_1$  skal bestemmes, så det er en tilnærmelse til funktionsværdien  $f(x_1)$ . Da  $h$  er lille, er  $x_1$  tæt på  $x_0$ . Vi begår derfor ikke nogen stor fejl ved at bestemme  $y_1$  ud fra tangenten i  $(x_0, y_0)$ . Tangenten falder jo næsten sammen med grafen for  $f$  omkring punktet  $(x_0, y_0)$ , da  $f$  er en differentiabel funktion (se figur 29).



Figur 29



Figur 30

Med tangentens ligning fås

$$\begin{aligned} y_1 &= f'(x_0)(x_1 - x_0) + f(x_0) = f'(x_0)(x_0 + h - x_0) + f(x_0) \\ &= f'(x_0)h + f(x_0) = q(x_0, y_0)h + y_0. \end{aligned}$$

Punktet  $(x_1, y_1)$  beregnes altså ud fra differentialligningen og de tre tal  $x_0, y_0$  og  $h$  med formlerne

$$x_1 = x_0 + h \quad \text{og} \quad y_1 = q(x_0, y_0)h + y_0.$$

Vi benytter nu præcis samme fremgangsmåde og bestemmer punktet  $(x_2, y_2)$  ud fra differentialligningen og de tre tal  $x_1, y_1$  og  $h$ :

$$x_2 = x_1 + h \quad \text{og} \quad y_2 = q(x_1, y_1)h + y_1.$$

Sådan kan vi blive ved, indtil vi har tilpas mange punkter, der tilnærmer grafen for  $f$  (se figur 30).

For hvert nyt punkt  $(x_{k+1}, y_{k+1})$  der beregnes, må vi forvente en større afvigelse til grafen for  $f$ . Vi regner jo hele tiden videre på et punkt  $(x_k, y_k)$ , der kun tilnærmelsesvist er på grafen for  $f$ .

Vi sammenfatter overvejelserne i en sætning:

#### SÆTNING 6 (EULERS METODE)

Lad  $y' = q(x, y)$  være en differentialligning, og lad  $f$  være den løsning, der går gennem  $(x_0, y_0)$ . Vælges tallet  $h > 0$  tæt på 0, kan ligningerne

$$x_{k+1} = x_k + h \quad \text{og} \quad y_{k+1} = q(x_k, y_k)h + y_k$$

benyttes til at bestemme løsningen numerisk:

$$(x_0, y_0), (x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n).$$

#### EKSEMPEL 29

Vi søger den løsning  $f$  til

$$y' = x^2 + y,$$

der går gennem punktet  $(x_0, y_0) = (-1, 4)$ , og vil bruge Eulers metode til at bestemme løsningen numerisk. Ligningen er en lineær førsteordens differentialligning, som derfor kan løses med sætning 3. Vi kan så efterfølgende sammenligne den numeriske løsning med den analytiske løsning.

Vi fastsætter skridtlængden  $h$  til 0,1 og vil med Eulers metode bestemme 30 punkter udover det første punkt  $(x_0, y_0)$ :

$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_{30}, y_{30}),$$

der tilnærmelsesvist er på grafen for  $f$ .

Af diffe

til at fr

dvs. p

Sådar  
ter:

I prak

Den a

Figur  
ser, a

Vi præ  
ning v  
figure

Af differentialligningen kan vi se, at  $q(x, y) = x^2 + y$ , og vi skal derfor benytte ligningerne

$$x_{k+1} = x_k + 0,1 \quad \text{og} \quad y_{k+1} = (x_k^2 + y_k) \cdot 0,1 + y_k$$

til at frembringe de 30 punkter. For  $k = 0$  får vi

$$\begin{cases} x_1 = x_0 + 0,1 = -1 + 0,1 = -0,9 \\ y_1 = (x_0^2 + y_0) \cdot 0,1 + y_0 = ((-1)^2 + 4) \cdot 0,1 + 4 = 4,5, \end{cases}$$

dvs. punktet  $(x_1, y_1) = (-0,9; 4,5)$ . For  $k = 1$  får vi

$$\begin{cases} x_2 = x_1 + 0,1 = -0,9 + 0,1 = -0,8 \\ y_2 = (x_1^2 + y_1) \cdot 0,1 + y_1 = ((-0,9)^2 + 4,5) \cdot 0,1 + 4,5 = 5,031. \end{cases}$$

Sådan fortsætter vi og får på den måde frembragt en numerisk løsning med i alt 31 punkter:

startpunktet  $(-1, 4)$  samt  $(-0,9; 4,5)$ ,  $(-0,8; 5,03)$ , ... ,  $(2; 78,89)$ .

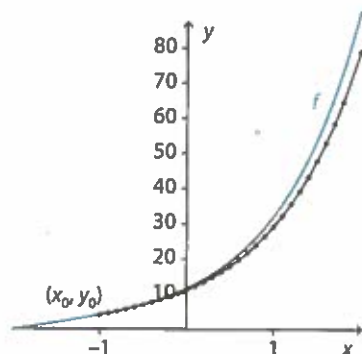
I praksis udføres de mange trivielle beregninger i CAS eller i et regneark.

Den analytiske løsning kan med sætning 3 bestemmes til

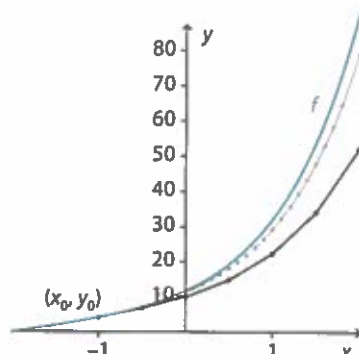
$$f(x) = -x^2 - 2x - 2 + 5e^{x+1}.$$

Figur 31 viser grafen for den analytiske løsning sammen med den numeriske løsning. Vi ser, at afvigelsen fra den analytiske løsning bliver gradvist større.

Vi prøver også at ændre skridtlængden  $h$  til 0,5 og får på den måde den numeriske løsning vist på figur 32. Med større skridtlængde bliver tilnærmelsen dårligere, og vi ser på figuren en endnu større afvigelse fra den analytiske løsning.



Figur 31



Figur 32