5.3 Uafhængighed

Definition 28. Lad A og B være hændelser i et udfaldsrum U med sandsynlighedsfordeling P. Så kalder vi A og B *uafhængige*, hvis

$$P(A \cap B) = P(A)P(B)$$

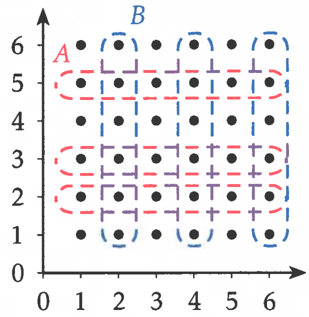
I mange tilfælde vil den rent fysiske udførelse af eksperimentet sikre uafhængighed af hændelserne. Dette gælder specielt, når vi laver udtagninger med tilbagelægning. Men generelt kan vi ikke forudsige uafhængighed ved brug af sund fornuft. For at afgøre uafhængighed eller afhængighed skal vi benytte Definition 28.

Eksempel 124

To symmetriske terninger, en blå og en rød, bliver kastet samtidig, og vi betragter hændelserne

A: Den røde terning viser et primtal

B: Den blå terning viser et lige tal



Figur 5.11

Så er

$$P(A \cap B) = \frac{9}{36} = \frac{1}{4}$$

og

$$P(A) \cdot P(B) = \frac{18}{36} \cdot \frac{18}{36} = \frac{1}{4}$$

Da $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$ er de to hændelser A og B uafhængige.

Ved terningkast kan vi normalt med sindsro påstå uafhængighed af kastets udførelse.
Således er

$$P(\text{rød sekser og blå femmer}) = P(\text{rød sekser}) \cdot P(\text{blå femmer}) = \frac{6}{36} \cdot \frac{6}{36} = \frac{1}{36}$$

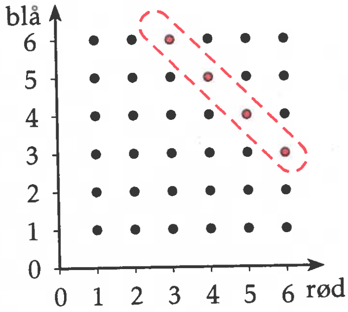
Eksempel 125

To mænd A og B skyder til måls. Sandsynligheden for, at A rammer målet, er 80 %, mens sandsynligheden for, at B rammer målet, er 70 %. De to mænd skyder til måls samtidigt.
Hvis vi antager, at de to mænds evne til at ramme målet er uafhængige af hinanden (inden for sport er dette tvivlsomt), så er sandsynligheden for, at de to mænd begge rammer målet

$$P(\text{begge rammer}) = P(A \text{ rammer})P(B \text{ rammer}) = 0,80 \cdot 0,70 = 0,56$$

5.4 Betingede sandsynligheder

Ved et slag med en rød og en blå terning bliver øjensummen 9. Vi vil finde sandsynligheden for, at den røde terning viser 6.
Når vi ved, at summen er 9, kan vi nøjes med at se på de indrammede udfald på figur 5.13.



Figur 5.13

Af de fire udfald svarer et enkelt til, at den røde terning viser 6, så

$$P(\text{den røde terning viser 6, når øjensummen er 9}) = \frac{1}{4}$$

Sandsynligheden for at den røde terning viser 6 er altså 25 %, og den er et eksempel på en betinget sandsynlighed, som er fundet ud fra den betingelse, at øjensummen skal være 9.

Generelt har vi følgende definition

Definition 30. Antag, at A og B er hændelser i et udfaldsrum U med $P(B) \neq 0$. Ved *den betingede sandsynlighed* $P(A|B)$ forstår vi

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Vi læser $P(A|B)$ som „sandsynligheden for A under forudsætning af B“. Den betingede sandsynlighed $P(A|B)$ svarer til sandsynligheden for A, når vi allerede ved, at B er indtruffet. Den svarer ikke til sandsynligheden for en hændelse i U, men svarer nærmere til „den brøkdel som A udgør af B“.

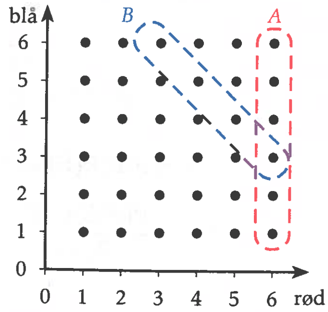
Eksempel 127

Ved et slag med en rød og en blå terning ser vi på hændelserne

A: Den røde terning viser 6

B: Øjensummen er 9

$A \cap B$: Den røde terning viser 6, og øjensummen er 9



Figur 5.14

Så er

$$P(B) = \frac{4}{36} \quad \text{og} \quad P(A \cap B) = \frac{1}{36}$$

hvorfor

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{36}}{\frac{4}{36}} = \frac{1}{4}$$

Sandsynligheden for, at vi har slået en sekser med den røde terning, er altså 25%, når vi ved, at øjensummen er 9.

Eksempel 128

En hat indeholder ti sedler med numrene 1 til 10. Vi trækker på tilfældig måde en seddel og vil finde sandsynligheden for, at tallet på sedlen er deleligt med 3, når nummeret på sedlen er et lige tal. Som sandsynlighedsfelt vælger vi udfaldsrummet $U = \{1, 2, 3, ..., 10\}$ med ligefordelingen.
Vi ser nu på hændelserne

A: Tallet på sedlen er deleligt med 3

B: Tallet på sedlen er lige

Den søgte sandsynlighed er så $P(A|B)$.
Halvdelen af tallene er lige, så $P(B) = \frac{1}{2}$, og $P(A \cap B) = \frac{1}{10}$, da 6 er det eneste lige tal mellem 1 og 10, der er deleligt med 3.
Altså er

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{5}$$

Øvelse 160