



MINISTERIET FOR
BØRN OG
UNDERVISNING
KVALITETS- OG
TILSYNSSTYRELSEN

Matematik A

Studentereksamen

Forberedelsesmateriale til de digitale
eksamensopgaver med adgang til internettet

Forberedelsesmateriale til stx-A-Net MATEMATIK

Der skal afsættes 6 timer af holdets sædvanlige uddannelsestid til, at eleverne kan arbejde med forberedelsesmaterialet forud for den skriftlige prøve.

3-5 delspørgsmål i delprøve 2 af den skriftlige prøve tager udgangspunkt i det materiale, der findes i dette oplæg. De øvrige spørgsmål omhandler emner fra kernestoffet.

Oplægget indeholder teori, eksempler og øvelser i tilknytning til et emne, der ligger umiddelbart i forlængelse af et kernestofemne.

Resultaterne af arbejdet med dette forberedelsesmateriale bør medbringes til den skriftlige prøve.

Alle hjælpemidler er tilladt, og det er tilladt at modtage vejledning.

Indhold

Indledning.....	1
Funktioner af en variabel.....	2
Funktioner af to variable	3
Partiel differentiation.....	6
Gradient.....	7
Tangentplaner.....	9
Ekstrema for funktioner af en variabel.....	11
Ekstrema for funktioner af to variable.....	13
Dobbeltafledede og blandede afledede.....	15

Indledning

Emnet for dette forberedelsesmateriale er funktioner af to variable. Med udgangspunkt i din viden om differentialregning for funktioner af én variabel skal du arbejde med differentialregning for funktioner af to variable. Bemærk, at der ikke stilles skriftlige eksamensopgaver omhandlende snit- og niveaukurver. Disse er dog nødvendige for at belyse emnet teoretisk.

På nettet findes mange ressourcer med animationer i relation til dette emne se fx *Animated Demonstrations for Multivariable Calculus*, af John F. Putz, Mathematics and Computer Science Department, Alma College, Michigan: <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL10/C009/paper.html>.

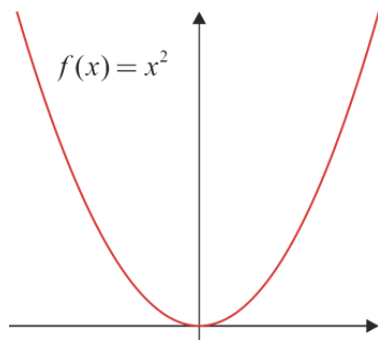
Forberedelsesmaterialet er inspireret af MATEMATIK OG DATABEHANDLING: NOTER OM MATEMATIK, KVL, 2006, Henrik Laurberg Pedersen og Thomas Vils Pedersen.

Funktioner af en variabel

Når vi tegner grafen for en funktion f , så vælger vi at tegne et udsnit af grafen forstået på den måde, at vi vælger et grafvindue, så vi får et relevant indtryk af grafens forløb. Vi kan vælge at fokusere på sammenhængen mellem bestemte x -værdier og y -værdier på grafen for f .

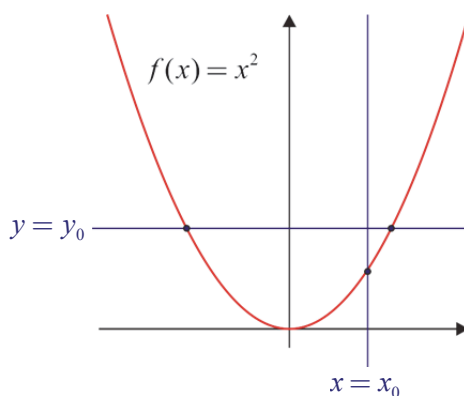
Eksempel 1: Lodret og vandret snit

Andengradspolynomiet $f(x) = x^2$ er et eksempel på en funktion af én variabel – her er x den uafhængige variabel, og $y = f(x)$ er den afhængige variabel. Hvis vi vælger grafvinduet, hvor x -værdierne ligger i intervallet $[-5; 5]$ og y -værdierne i intervallet $[-1; 30]$, så får vi følgende grafiske billede:



Vi skriver, at vi har valgt grafvinduet $[-5; 5] \times [-1; 30]$.

Vælger vi en bestemt x -værdi fx $x = x_0$, så får vi en bestemt funktionsværdi $y_0 = f(x_0)$. Dette kan vi illustrere grafisk ved at bestemme skæringspunktet mellem parabelen og den lodrette linje $x = x_0$. Dette kalder vi et *lodret snit* af parabelen. Vælger vi omvendt en bestemt funktionsværdi $y = y_0$, kan vi grafisk illustrere de tilhørende x -værdier ved at bestemme skæringspunkterne mellem parabelen og en vandret linje $y = y_0$. Dette kalder vi et *vandret snit* af parabelen.



Øvelse 1

En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3}$.

- Tegn grafen for f i et relevant grafvindue.
- Tegn i samme grafvindue det lodrette snit mellem grafen for f og linjen med ligningen $x = 2$.
- Tegn i samme grafvindue det vandrette snit mellem grafen for f og linjen med ligningen $y = 1$.

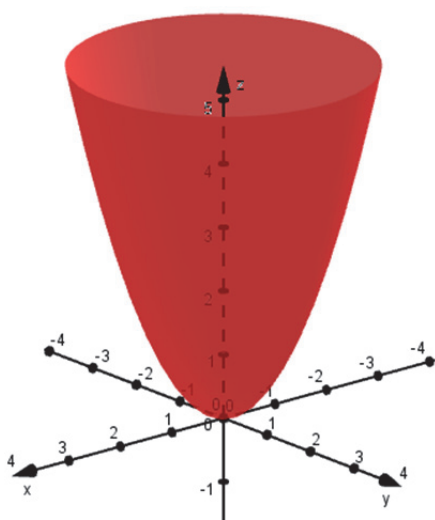
Funktioner af to variable

Vi vil nu udvide funktionsbegrebet til at omfatte funktioner af to variable, dvs. funktioner, hvor der er to uafhængige variable og en afhængig variabel. Grafen for en funktion af to variable er en tredimensional figur. Givet en funktion af to variable $f(x, y)$ får vi for hvert par af x -værdier og y -værdier en z -værdi $z = f(x, y)$.

Eksempel 2: Grafen for en funktion af to variable

Funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ er et eksempel på en funktion af to variable, hvor x og y er de uafhængige variable, og $z = f(x, y)$ er den afhængige variabel.

Grafen for f kan tegnes i et (x, y, z) -koordinatsystem, og hvis vi vælger grafvinduet $[-3, 3] \times [-3, 3] \times [-2, 5]$, så får vi:



Øvelse 2

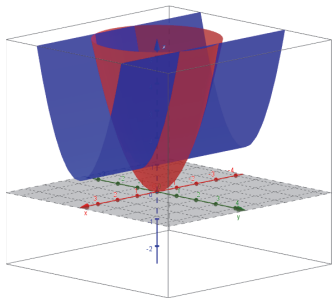
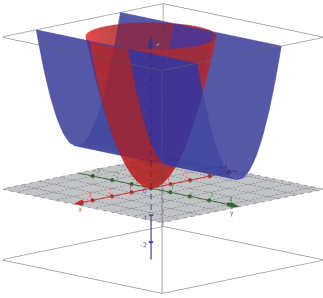
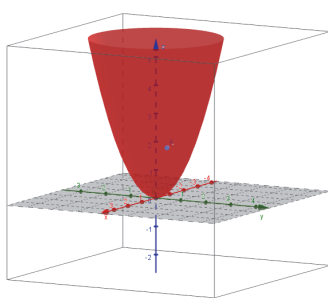
Tegn den tilsvarende graf for $f(x, y) = x^2 + y^2$ i dit værktøjsprogram. Vælg selv et grafvindue, så du får et relevant udsnit af grafen for f .

Definition 1: Funktion af to variable

Grafen for en funktion af to variable $z = f(x, y)$ består af punkterne $(x, y, z) = (x, y, f(x, y))$, hvor x og y gennemløber de reelle tal, medmindre andet er angivet.

Lodret snit og punkt

Betrager vi nu funktioner af to variable, så kan vi vælge at holde en af de to uafhængige variable fast, dvs. $x = x_0$ eller $y = y_0$, eller holde begge de uafhængige variable fast, dvs. $x = x_0$ og $y = y_0$. De tre forskellige situationer kan beskrives som følger:

$x = x_0$ og y variabel	x variabel og $y = y_0$	$x = x_0$ og $y = y_0$
 Hvis vi vælger $x_0 = 1$, får vi en funktion af én variabel, nemlig variablen y: $f(1, y) = 1 + y^2$. Grafen for denne funktion er en parabelformet rende, som vist på figuren. Funktionen kaldes en snitfunktion i y, og grafen kaldes en snitgraf for f.	 Hvis vi vælger $y_0 = 1$, får vi en funktion af én variabel, nemlig variablen x: $f(x, 1) = x^2 + 1$. Grafen for denne funktion er en parabelformet rende, som vist på figuren. Funktionen kaldes en snitfunktion i x, og grafen kaldes en snitgraf for f.	 Hvis vi vælger $x_0 = 1$ og $y_0 = 1$, får vi et punkt på grafen fordi z-koordinaten er givet, idet $z_0 = f(x_0, y_0)$. Punktets koordinater bliver: $(x_0, y_0, z_0) = (1, 1, f(1, 1)) = (1, 1, 2)$.

Definition 2: Snitfunktion og snitkurve

En snitfunktion for en funktion f af to variable er defineret ved

$$g(x) = f(x, y), \text{ hvor } y \text{ holdes fast eller}$$

$$g(y) = f(x, y), \text{ hvor } x \text{ holdes fast.}$$

Graferne for $g(x)$ og $g(y)$ kaldes for snitkurver for f i henholdsvis x og y .

Øvelse 3

Der er givet en funktion af to variable $f(x, y) = x^2 + y^2$.

- Bestem en forskrift for snitfunktionen for f i x , når $y_0 = 2$.
- Bestem en forskrift for snitfunktionen for f i y , når $x_0 = 2$.
- Bestem punktet på grafen for f , når $x_0 = 2$ og $y_0 = 2$.

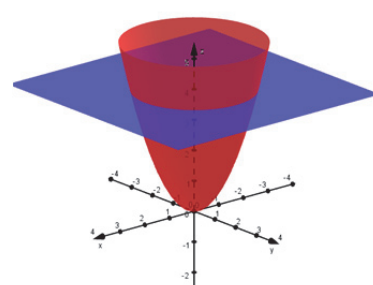
Eksempel 3: Niveaukurve

For funktionen

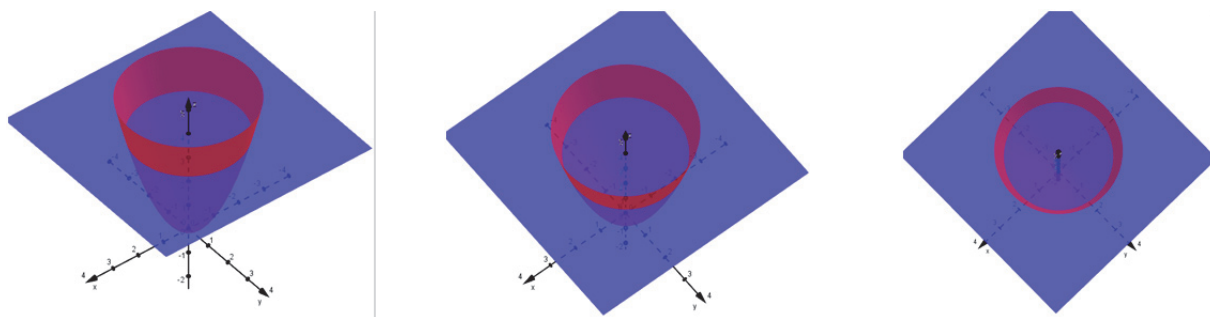
$$f(x, y) = x^2 + y^2$$

kan vi også vælge en fast værdi for den afhængige variabel fx. $z = 4$. Således er:

$$f(x, y) = 4 \quad \text{dvs.} \quad x^2 + y^2 = 4.$$



Den kurve, der fremkommer ved dette vandrette snit parallelt med xy -planen kaldes en *niveaukurve*, og er i dette tilfælde en cirkel. På nedenstående figurer ses niveaukurven fra forskellige vinkler.



Definition 3: Niveaukurve

En niveaukurve for en funktion f af to variable er den skæringskurve, der fremkommer, når grafen for f skæres af en vandret plan (dvs. en plan parallel med xy -planen) med ligningen $z = k$, hvor k er en konstant.

Niveaukurven kan således beskrives ved ligningen: $f(x, y) = k$.

Øvelse 4

Bestem ligningen for niveaukurven for funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$, når $k = 81$.

For hvilke værdier af k findes der ingen niveaukurve for f ?

Øvelse 5

To funktioner f og g af to variable er givet ved

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 3}.$$

- Tegn grafen for hver af funktionerne f og g .
- Tegn grafen for snitfunktionen for f og g i x , når $y_0 = 2$.
- Tegn grafen for snitfunktionen for f og g i y , når $x_0 = -2$.
- Tegn niveaukurven for f og g , når $k = 1$.

Øvelse 6

Tegn graferne for

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 3},$$

og sammenlign de grafiske forløb under inddragelse af snitfunktioner samt niveaukurver for f og g .

Øvelse 7

Volumenet af en cylinder er givet ved $V = \pi \cdot r^2 \cdot h$, hvor r er radius og h er højden i cylinderen.

- Hvordan kan udtrykket for cylinderens volumen skrives som en funktion af to variable?
- Tegn grafen for funktionen af to variable, og undersøg denne grafisk med henblik på snitkurver og niveaukurver.

Partiel differentiation

Differentiation er et centralt begreb i forbindelse med funktioner af én variabel, da differentialkvotienten i et givet punkt bestemmer tangentens hældningskoefficient i punktet og dermed fortæller, hvorledes grafen for funktioner af én variabel forløber.

Øvelse 8

Repetér regneregler for differentiation af funktioner af en variabel.

Når vi skal differentiere funktioner af to variable, ser vi på én variabel ad gangen.

Vi betragter altså de to snitfunktioner, hvor vi opfatter henholdsvis x og y som en konstant, og differentierer snitfunktionerne jf. de regneregler, der gælder for funktioner af en variabel.

Dette kaldes *partiel differentiation*, og vi får to afledede funktioner, der kaldes de partielt afledede.

Definition 4: Partielt afledede

Den partielt afledede $f'_x(x, y)$ af $f(x, y)$ mht. til x bestemmes ved at differentiere snitfunktionen $g(x) = f(x, y)$, når y fastholdes. Der gælder altså $f'_x(x, y) = g'(x)$.

På samme måde bestemmes den partielt afledede $f'_y(x, y)$ af $f(x, y)$ mht. y ved at differentiere snitfunktionen $g(y) = f(x, y)$, når x fastholdes. Der gælder altså $f'_y(x, y) = g'(y)$.

De partielt afledede af $f(x, y)$ mht. x og y betegnes også $\frac{\partial}{\partial x} f(x, y)$ hhv. $\frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$.

Eksempel 4: Partielt afledede

De partielt afledede af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ bestemmes ved at differentiere de to snitfunktioner $g(x) = x^2 + y^2$, hvor først y holdes konstant og dernæst x holdes konstant:

$$f'_x(x, y) = g'(x) = (x^2)' + (y^2)' = 2x + 0 = 2x.$$

Tilsvarende fås:

$$f'_y(x, y) = g'(y) = (x^2)' + (y^2)' = 0 + 2y = 2y.$$

Øvelse 9

Bestem de partielt afledede af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ vha. dit værktøjsprogram.

Eksempel 5: Partielt afledede

Vi bestemmer de partielt afledede af funktionen $f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$.

Først bestemmer vi den afledede mht. x , hvor vi anvender kæderegele for differentiation af sammensat

funktion:
$$f'_x(x, y) = g'(x) = \left(\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4} \right)' = \frac{-6y}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \cdot 2x = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Derefter bestemmer vi den afledede mht. y , hvor vi anvender produktreglen og kæderegele:

$$\begin{aligned} f'_y(x, y) = g'(y) &= \left(\frac{6y}{x^2 + y^2 + 4} \right)' = \left(6y \cdot \frac{1}{x^2 + y^2 + 4} \right)' \\ &= 6y \cdot \frac{-1}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \cdot 2y + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4} = \frac{-12y^2}{(x^2 + y^2 + 4)^2} + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4} \end{aligned}$$

De ovenstående partielt afledede kan også bestemmes vha. et værktøjsprogram.

Øvelse 10

Bestem vha. dit værktøjsprogram de partielt afledede for funktionen $f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3}$.

Øvelse 11

Bestem vha. dit værktøjsprogram de partielt afledede af følgende funktioner:

a) $f(x, y) = x^3 \cdot y + \frac{1}{x + y}, \quad x \neq -y$

b) $f(x, y) = (x + y)^3 + 4$

c) $f(x, y) = e^{x+y}$

En funktion af to variable siges at være differentiabel, hvis de partielt afledede findes og er kontinuerte. Dette vil vi ikke gå i nærmere detalje med her, men blot oplyse, at de funktioner af to variable, der omtales i det følgende, alle er differentiable.

Gradient

For en funktion f af en variabel gælder, at den afledede funktion $f'(x_0)$ angiver hældningskoefficienten for tangenten til grafen for f i punktet $(x_0, y_0) = (x_0, f(x_0))$.

Tilsvarende gælder der for en funktion f af to variable, at den partielt afledede $f'_x(x_0, y_0)$ beskriver hældningskoefficienten for tangenten i punktet $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på snitgrafen for snitfunktionen $g(x)$, og $f'_y(x, y)$ angiver hældningskoefficienten for tangenten i punktet $(x_0, y_0, z_0) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ på grafen for snitfunktionen $g(y)$.

De to partielt afledede er henholdsvis første- og andenkoordinat for en vektor, der kaldes gradienten for f .

Definition 5: Gradient

For en funktion $f(x, y)$ med partielt afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ defineres gradienten for f som

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix}$$

Gradienten har den egenskab, at den peger i den retning, hvor funktionsværdien har den største positive ændring. Det betyder med andre ord, at hvis vi står i et punkt på grafen for f , så vil gradienten, tænkt som en vektor i xy -planen, angive den retning, hvor grafen er stejlest. Omvendt vil funktionsværdien have den største negative ændring i den modsatte retning af, hvor gradienten peger hen. På det websted, der er nævnt i indledningen, er der adgang til en animation (nr. 10), der viser forskellige tangenter til grafen for en funktion i et bestemt punkt (direkte link: <http://archives.math.utk.edu/ICTCM/VOL10/C009/dd.gif>). Man kan se, at tangenten i punktet er stejlest, når den peger i retning af gradienten, som er angivet ved en grøn streg nederst i xy -planen.

Eksempel 6: Grafens stejlhed i et bestemt punkt på grafen

Gradienten af funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ er som nævnt ovenfor:

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} 2x \\ 2y \end{pmatrix}.$$

Gradienten i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$ er derfor:

$$\text{grad}(f)(1, 3) = \begin{pmatrix} 2 \cdot 1 \\ 2 \cdot 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$$

Det betyder, at i punktet $P(1, 3, f(1, 3))$ er grafen for f stejlest i positiv henseende langs gradientens retning, dvs. 2 hen ad x -aksen og 6 ud ad y -aksen. Grafen for funktionen f er stejlest i negativ henseende langs vektoren $\begin{pmatrix} -2 \\ -6 \end{pmatrix}$.

Eksempel 7: Grafens stejlhed langs koordinataksene

Gradienten for funktionen $f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 2}$ er

$$\text{grad}(f)(x, y) = \begin{pmatrix} f'_x(x, y) \\ f'_y(x, y) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \\ \frac{6(x^2 - y^2 + 2)}{(x^2 + y^2 + 2)^2} \end{pmatrix}$$

Gradienten i punktet $O(0, 0, 0)$ er derfor: $\text{grad}(f)(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Det betyder, at i $O(0, 0, 0)$ er grafen stejlest i positiv henseende, når man bevæger sig langs y -aksen.

Øvelse 12

Bestem vha. dit værktøjsprogram gradienterne i de to foregående eksempler.

Øvelse 13

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x, y) = \frac{x + y}{x^2 + y^2} \quad \text{og} \quad g(x, y) = \sqrt{16 - 2x^2 - y^2}.$$

- Bestem gradienten for f i punktet $(1, 1, f(1, 1))$.
- I hvilken retning er ændringen i funktionsværdien for f stejlest i henholdsvis positiv og negativ henseende?
- Bestem gradienten for g i $(1, 2, g(1, 2))$.
- I hvilken retning er ændringen i funktionsværdien for g stejlest i henholdsvis positiv og negativ henseende?

Tangentplaner

En graf for en funktion af to variable har uendelig mange tangenter i ethvert punkt. Gradienten er en retningsvektor for den stejleste af tangenterne i et punkt. Tangenterne til grafen for f i et punkt udspænder tilsammen en plan. Denne plan kaldes tangentplanen for f .

Nedenstående sætning angiver, hvordan vi kan bestemme en ligning for en tangentplan til grafen for f i et givet punkt, men først repeteres kort teorien om planer i rummet. Ligningen for en plan kan bestemmes ud

fra en normalvektor $\vec{n} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$ samt et fast punkt i planen $P_0(x_0, y_0, z_0)$. Normalvektoren $\vec{n}$ står som bekendt

vinkelret på planen, og dermed også vinkelret på alle vektorer i planen. For et vilkårligt punkt $Q(x, y, z)$ i planen, må derfor gælde, at vektoren $\overrightarrow{P_0Q}$ står vinkelret på $\vec{n}$.

Da prikproduktet mellem to vektorer, der står vinkelret på hinanden, er 0, får vi

$$\vec{n} \cdot \overrightarrow{P_0Q} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \\ z - z_0 \end{pmatrix} = 0$$

Og når vi udregner prikprodukt, får vi ligningen for tangentplanen

$$a \cdot (x - x_0) + b \cdot (y - y_0) + c \cdot (z - z_0) = 0.$$

Sætning 1: Tangentplan

Lad $f(x, y)$ være en funktion af to variable, og lad $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være et punkt på grafen for f , dvs. $z_0 = f(x_0, y_0)$. De partielt afledede af f i punktet P_0 betegnes $p = f'_x(x_0, y_0)$ og $q = f'_y(x_0, y_0)$.

Tangentplanen for $f(x, y)$ i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$ er da givet ved:

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

Bevis

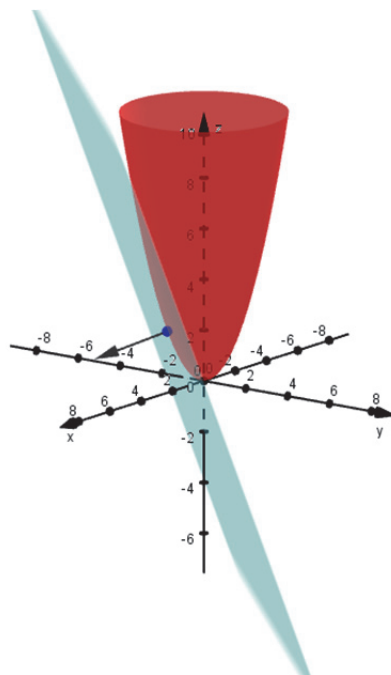
Først bestemmes en normalvektor til tangentplanen.

p er hældningskoefficienten for tangenten til snitgrafen for snitfunktionen $g(x)$, der ligger parallelt med xz -planen, da y holdes konstant. En retningsvektor for denne tangent er givet ved:

$$\vec{r}_x = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix}$$

Tilsvarende er q hældningskoefficienten for tangenten til snitgrafen for snitfunktionen $g(y)$, der ligger parallelt med yz -planen. En retningsvektor for denne tangent er givet ved:

$$\vec{r}_y = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix}$$



Vi ved fra rumgeometrien, at en normalvektor for en plan er bestemt ved krydsproduktet mellem to ikke-parallele vektorer i planen. Normalvektoren $\vec{n}$ for tangentplanen kan derfor bestemmes ved krydsproduktet mellem de to retningsvektorer $\vec{r}_x$ og $\vec{r}_y$, som er:

$$\vec{n} = \vec{r}_x \times \vec{r}_y = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ p \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -p \\ -q \\ 1 \end{pmatrix}$$

Således er planen bestemt ved ligningen:

$$p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) - 1 \cdot (z - z_0) = 0$$

$$p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0) - z + z_0 = 0$$

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

Hvilket netop var det udtryk, vi søgte.

Eksempel 8: Tangentplaner

Vi vil bestemme tangentplanen for funktionen $f(x, y) = x^2 + y^2$ i punktet $(1, -1, f(1, -1))$. Dvs. $x_0 = 1$, $y_0 = -1$ og $z_0 = f(1, -1) = 2$.

Vi indsætter punktets x -og y -koordinater i de partielt afledede, som vi fandt i eksempel 4, og vi får

$$p = f'_x(1, -1) = 2 \text{ og } q = f'_y(1, -1) = -2$$

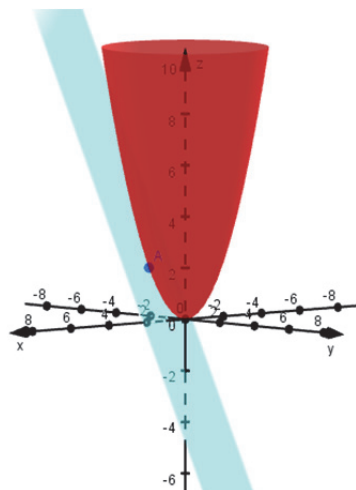
Vi indsætter nu i tangentens ligning fra sætningen ovenfor og får:

$$z = z_0 + p \cdot (x - x_0) + q \cdot (y - y_0)$$

$$z = 2 + 2 \cdot (x - 1) - 2 \cdot (y + 1)$$

$$z = 2 + 2x - 2 - 2y - 2$$

$$z = 2x - 2y - 2$$



Øvelse 14

En funktion f har forskriften

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 2}.$$

- a) Bestem en ligning for tangentplanen til f i punktet $(0, 1, f(0, 1))$.
- b) Tegn grafen for f sammen med tangentplanen i dit værktøjsprogram.

Øvelse 15

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \sqrt{9 - x^2 - y^2}.$$

- a) Bestem de partielt afledede for f .
- b) Bestem en ligning for tangentplanen til f i punktet $(2, 2, f(2, 2))$.
- c) Tegn grafen for f sammen med tangentplanen i dit værktøjsprogram.

Ekstrema for funktioner af en variabel

Grafer for funktioner af to variable er langt sværere at undersøge grafisk end grafer for funktioner af én variabel. Analogt til funktioner af én variabel vil vi inddrage differentialregning i vores undersøgelse af grafer for funktioner af to variable.

Øvelse 16

Betragt funktionen $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 3}$.

Bestem $f'(x)$, og bestem de lokale ekstremumssteder og de tilhørende ekstremumsværdier.

Arten (typen) af et lokalt ekstremumpunkt, dvs. om der er tale om et lokalt minimum eller et lokalt maksimum, kan vi afgøre ud fra fortegnet for $f'(x)$. Denne afgørelse kan også baseres på den dobbeltafledede $f''(x)$, så vi i en vis forstand undersøger, om $f'(x)$ er voksende eller aftagende.

Eksempel 9: Den anden afledede afgør arten af ekstremumpunkter

For funktionen $f(x) = \frac{6x}{x^2 + 9}$ gælder det, at $f'(x) = 0 \Leftrightarrow x = -3 \vee x = 3$ (tjek selv!).

Bestemmer vi $f''(x)$ finder vi, at $f''(-3) = \frac{1}{9}$, dvs. $f'(x)$ er voksende omkring det lokale

ekstremumpunkt, og dermed er det et lokalt minimum. Tilsvarende finder vi, at $f''(3) = -\frac{1}{9}$, dvs. $f'(x)$ er aftagende omkring det lokale ekstremumpunkt, og dermed er det et lokalt maksimum.

Øvelse 17

En funktion f er givet ved $f(x) = \frac{1}{4}x^4 - \frac{5}{3}x^3 + 4x^2 - 4x$.

- Bestem $f'(x)$, $f''(x)$ og løs $f'(x) = 0$.
- Bestem i de x -værdier, hvor $f'(x) = 0$, fortegnet for $f''(x)$.
- Benyt fortegnet for $f''(x)$ og grafen for f til at afgøre arten af de lokale ekstrema, dvs. om der er tale om lokalt minimum eller lokalt maksimum.

Øvelse 18

Vi ser på en funktion f , hvorom det i et punkt $(x_0, f(x_0))$ gælder, at både $f'(x_0) = 0$ og $f''(x_0) = 0$. Hvordan kan grafen for f se ud omkring $(x_0, f(x_0))$?

På baggrund af ovenstående generaliserer vi til følgende sætning:

Sætning 2: Arten af ekstremumpunkterne ud fra den dobbeltafledede

Lad $P_0(x_0, f(x_0))$ være et punkt på grafen for en funktion f , hvor $f'(x_0) = 0$. Da gælder der, at

- Hvis $f''(x_0) > 0$, så er x_0 et lokalt minimumssted.
- Hvis $f''(x_0) < 0$, så er x_0 et lokalt maksimumssted.
- Hvis $f''(x_0) = 0$, så kan der være en vandret vendetangent for x_0 .

Øvelse 19

Et andengradspolynomium er givet ved $f(x) = ax^2 + bx + c$.

- Bestem $f'(x)$ og $f''(x)$.
- Løs ligningen $f'(x) = 0$, og bestem fortegnet for $f''(x)$ i den fundne x -værdi.
- Hvad fortæller resultaterne i b) om forløbet af grafen for f ?

Øvelse 20

Nedenfor er angivet to traditionelle eksamensopgaver, der omhandler monoton for funktioner af én variabel. Løs disse opgaver ved i hvert tilfælde at undersøge fortegnene for den dobbelt afledede $f''(x)$.

Eksamen stx B august 2010:

En funktion f er givet ved

$$f(x) = e^x - 3x + 1$$

Bestem $f'(x)$, og gør rede for, at funktionen f har et minimum.

Eksamen stx A december 2010:

To funktioner f og g er bestemt ved

$$f(x) = x^2 - 4x + 8$$

$$g(x) = 3x \cdot e^{-x}.$$

Bestem den værdi af x , hvor den lodrette afstand mellem grafen for f og grafen for g er mindst mulig.

Ekstrema for funktioner af to variable

Ekstremumsbegrebet for funktioner af én variabel kan udvides til funktioner af to variable således, at:

- et lokalt maksimum er en funktionsværdi, der er større end alle andre funktionsværdier i nærheden af det lokale maksimum
- et lokalt minimum er en funktionsværdi, der er mindre end alle andre funktionsværdier i nærheden af det lokale minimum
- et globalt maksimum er en funktionsværdi, der er større end alle andre funktionsværdier (i definitionsmængden)
- et globalt minimum er en funktionsværdi, der er mindre end alle andre funktionsværdier (i definitionsmængden)
- et lokalt/globalt ekstremum er enten et lokalt/globalt maksimum eller minimum.

For funktioner af én variabel gælder, at hvis en funktion $f(x)$ har et lokalt ekstremum i x_0 så er $f'(x_0) = 0$. Noget tilsvarende gælder for funktioner af to variable.

Sætning 3

Antag, at $f(x, y)$ har lokalt ekstremum i punktet $P_0(x_0, y_0, z_0)$.

Så gælder der, at $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Bevis

Hvis $f(x, y)$ har et lokalt maksimum i $P_0(x_0, y_0, z_0) = P_0(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, så vil snitfunktionen $g(x) = f(x, y_0)$ have et lokalt maksimum i $x = x_0$, og derfor er $g'(x_0) = 0$.

Da $g(x) = f(x, y_0)$, så er $g'(x_0) = f'_x(x_0, y_0)$ og dermed er $f'_x(x_0, y_0) = 0$.

På helt samme måde vises, at hvis $f(x, y)$ har et lokalt maksimum i $P(x_0, y_0, z_0) = P(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$, så er $g'(y_0) = f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Beviset er det samme, hvis funktionen har et lokalt minimum. Således er sætningen bevist.

Bemærk: Den omvendte sætning gælder ikke nødvendigvis – hverken for funktioner af én variabel eller funktioner af to variable.

For funktioner af en variabel gælder der, at hvis $f'(x_0) = 0$, så har funktionen f en vandret tangent i x_0 . Den vandrette tangent kan give anledning til et maksimum, minimum eller den kan være en vendetangent.

For funktioner af to variable gælder, at hvis $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$, så er tangentplanen i $P(x_0, y_0, z_0)$ vandret, og vi får: $z = z_0 + 0 \cdot (x - x_0) + 0 \cdot (y - y_0)$, dvs. $z = z_0$.

Punkter med vandrette tangentplaner kaldes *stationære punkter*. Stationære punkter er ikke nødvendigvis maksimumpunkter eller minimumpunkter. De kan også være såkaldte saddelpunkter.

Definition 6: Stationære punkter

Et punkt $P_0(x_0, y_0, z_0)$, hvor $z_0 = f(x_0, y_0)$ kaldes et stationært punkt for en funktion $f(x, y)$ af to variable, hvis $f'_x(x_0, y_0) = 0$ og $f'_y(x_0, y_0) = 0$.

Definition 7: Saddelpunkt

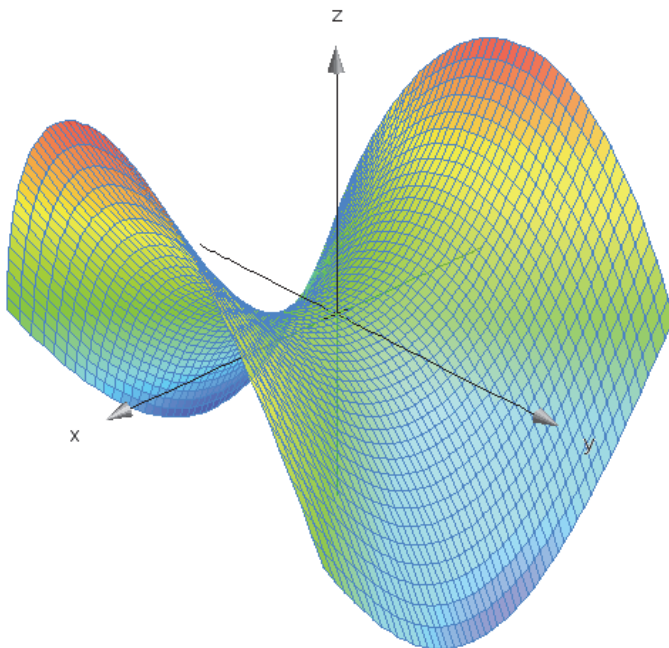
Et saddelpunkt er et stationært punkt, der hverken er et lokalt maksimumpunkt eller et lokalt minimumpunkt.

Eksempel 10: Saddelpunkt

Funktionen

$$f(x, y) = x^2 - y^2,$$

hvis graf ses på figuren til højre, viser tydeligt et saddelpunkt i $(0, 0, 0)$.



Øvelse 21

Tegn grafen for $f(x, y) = x^2 - y^2$ i et værktøjsprogram.

Eksempel 11: Bestemmelse af arten af stationære punkter

Vi vil bestemme eventuelle stationære punkter for funktionen f med forskriften:

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$$

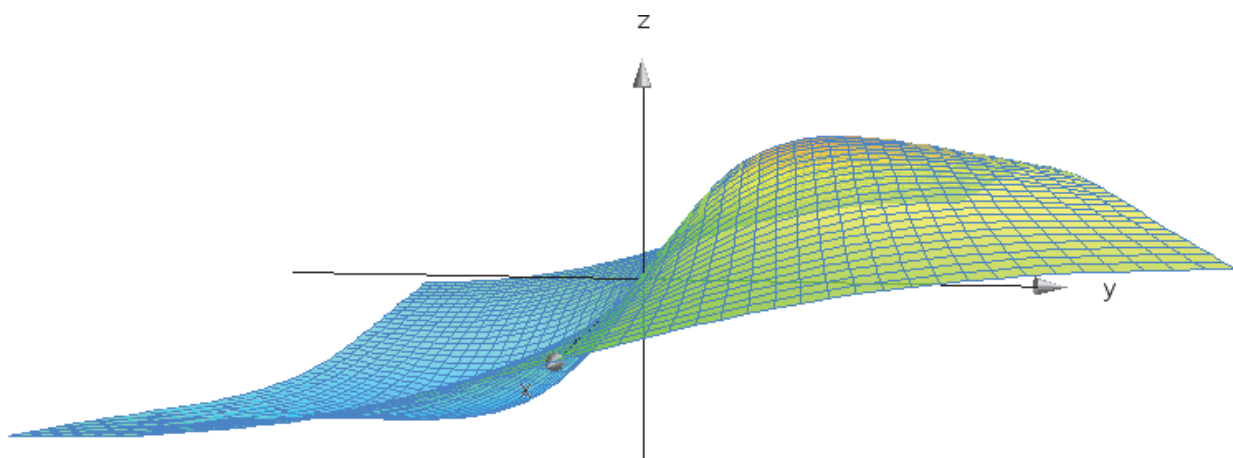
De partielt afledede bestemmes til (ved differentiation af sammensat funktion eller ved brug af et værktøjsprogram):

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = \frac{6(x^2 - y^2 + 4)}{(x^2 + y^2 + 4)^2}$$

Vi finder nu eventuelle stationære punkter ved at løse $f'_x(x, y) = 0$ og $f'_y(x, y) = 0$. I et værktøjsprogram bestemmes eventuelle stationære punkter ved at løse to ligninger med to ubekendte ved brug af en solve-kommando fx:

$$\text{solve} \left(\frac{-12 \cdot x \cdot y}{(x^2 + y^2 + 4)^2} = 0 \text{ and } \frac{-6 \cdot (y^2 - x^2 - 4)}{(y^2 + x^2 + 4)^2} = 0, x, y \right) \rightarrow x=0 \text{ and } y=-2 \text{ or } x=0 \text{ and } y=2$$

Vi får altså de to stationære punkter: $S_1(0, -2, f(0, -2)) = S_1(0, -2, -1.5)$ og $S_2(0, 2, f(0, 2)) = S_2(0, 2, 1.5)$. Af grafen fremgår det, at der er et lokalt minimum i S_1 og lokalt maksimum i S_2 .

**Dobbeltafledede og blandede afledede**

Det kan indimellem være svært at afgøre om de enkelte stationære punkter er maksimumspunkter, minimumspunkter eller saddelpunkter. De dobbeltafledede kan ligesom for funktioner af en variabel være med til at afgøre dette.

I afsnittet **Ekstrema for funktioner af en variabel** arbejdede vi med den dobbeltafledede af funktioner af én variabel. På samme vis kan vi bestemme dobbeltafledede af funktioner af to variable.

Eksempel 12: Dobbelt afledede funktioner

En funktion f er givet ved

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}.$$

I eksempel 5 bestemte vi de partielt afledede $f'_x(x, y)$ og $f'_y(x, y)$ for denne funktion til at være:

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \quad \text{og} \quad f'_y(x, y) = \frac{-12y^2}{(x^2 + y^2 + 4)^2} + \frac{6}{x^2 + y^2 + 4}$$

Vi differentierer disse to funktioner en gang til og får de dobbelt afledede, hvor vi differentierer mht. samme variabel to gange, eller først mht. den ene variabel og derefter mht. den anden variabel:

Vi differentierer $f'_x(x, y)$ mht. x

$$f''_{xx}(x, y) = \frac{12(3x^2 - y^2 - 4)y}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_x(x, y)$ mht. y

$$f''_{xy}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_y(x, y)$ mht. x

$$f''_{yx}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Vi differentierer $f'_y(x, y)$ mht. y

$$f''_{yy}(x, y) = \frac{12y(y^2 - 3x^2 - 12)}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

Øvelse 22

Hvad fortæller eksemplet om de blandede afledede $f''_{xy}(x, y)$ og $f''_{yx}(x, y)$?

Definition 8: De dobbelt afledede og blandede afledede funktioner

Betrakt en funktion f af to variable.

De dobbelt afledede er defineret ved: $f''_{xx}(x, y) = (f'_x(x, y))'_x$ og $f''_{yy}(x, y) = (f'_y(x, y))'_y$

De blandede afledede er defineret ved: $f''_{xy}(x, y) = (f'_x(x, y))'_y$ og $f''_{yx}(x, y) = (f'_y(x, y))'_x$

Øvelse 23

Bestem de dobbelt afledede og de blandede afledede fra eksempel 12 ved hjælp af dit værktøjsprogram.

Øvelse 24

En funktion f har forskriften

$$f(x, y) = \frac{6x}{x^2 + y^2 + 3}.$$

Bestem de dobbelt afledede og de blandede afledede.

I de ovenstående eksempler er de blandede afledede ens. Det fremgår af nedenstående sætning, at dette resultat gælder i de fleste tilfælde.

Sætning 4

Hvis de dobbelt afledede og de blandede afledede af f er kontinuerte, så er $f''_{xy}(x, y) = f''_{yx}(x, y)$.

Denne funktion betegnes normalt f''_{xy} , og den kaldes den blandede afledede af f .

Følgende sætning (som vi ikke beviser) kan benyttes, når vi skal afgøre, om et stationært punkt er et lokalt maksimum, lokalt minimum eller et saddepunkt.

Sætning 5

Lad $P_0(x_0, y_0, z_0)$ være et stationært punkt for funktionen $f(x, y)$, og lad

$$r = f''_{xx}(x_0, y_0) \quad s = f''_{xy}(x_0, y_0) \quad t = f''_{yy}(x_0, y_0)$$

så gælder der, at

- når $rt - s^2 > 0$ og $r > 0$, har f et lokalt minimum i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 > 0$ og $r < 0$, har f et lokalt maksimum i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 < 0$, har f et saddepunkt i $P_0(x_0, y_0, z_0)$
- når $rt - s^2 = 0$, kan vi ikke slutte noget.

Eksempel 13: Arten af stationære punkter

Vi fandt i eksempel 12, at funktionen

$$f(x, y) = \frac{6y}{x^2 + y^2 + 4}$$

har et lokalt minimum i $S_1(0, -2, -1.5)$, og et lokalt maksimum i $S_2(0, 2, 1.5)$.

Vi finder r , s og t for at undersøge, om dette stemmer overens med sætning 5.

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{xx}(x, y) = \frac{12(3x^2 - y^2 - 4)y}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

$$f'_x(x, y) = \frac{-12xy}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{xy}(x, y) = \frac{12(3y^2 - x^2 - 4)x}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

$$f'_y(x, y) = \frac{6(x^2 - y^2 + 4)}{(x^2 + y^2 + 4)^2} \Rightarrow f''_{yy}(x, y) = \frac{12y(y^2 - 3x^2 - 12)}{(x^2 + y^2 + 4)^3}$$

De stationære punkters x - og y -koordinater indsættes:

$$r = f''_{xx}(0, 2) = -\frac{3}{8}, \quad s = f''_{xy}(0, 2) = 0, \quad t = f''_{yy}(0, 2) = -\frac{3}{8}$$

Dvs.

$$rt - s^2 = \left(-\frac{3}{8}\right) \cdot \left(-\frac{3}{8}\right) - 0^2 = \frac{9}{64} > 0, \text{ altså er } r = -\frac{3}{8} < 0$$

Heraf kan vi konkludere, at det stationære punkt $S_2(0, 2, 1.5)$ er et lokalt maksimum.

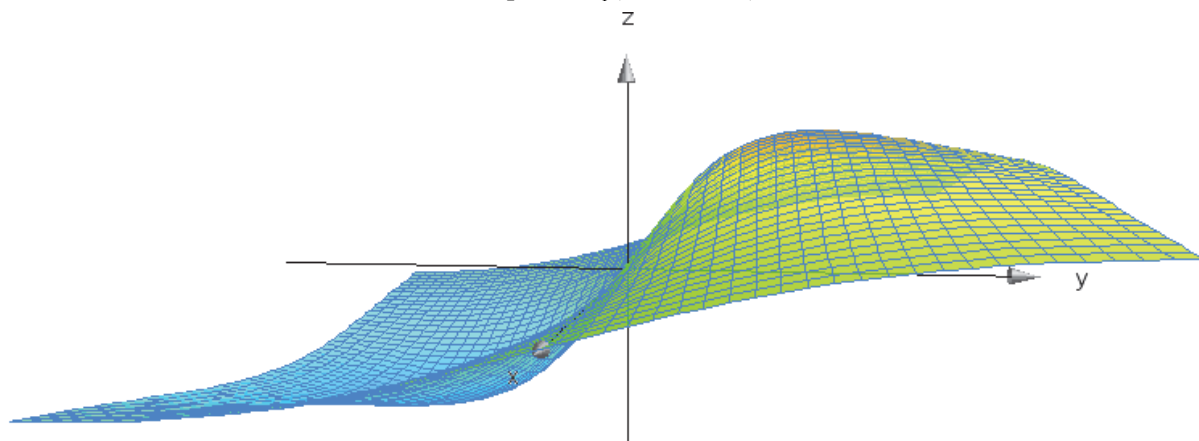
Funktionsværdierne for de dobbelt afledede og den blandede afledede i det andet stationære punkt bestemmes vha. et værktøjsprogram.

$$r = f''_{xx}(0, -2) = \frac{3}{8}, \quad s = f''_{xy}(0, -2) = 0, \quad t = f''_{yy}(0, -2) = \frac{3}{8}$$

Dvs.

$$rt - s^2 = \left(\frac{3}{8}\right) \cdot \left(\frac{3}{8}\right) - 0^2 = \frac{9}{64} > 0, \text{ altså er } r = \left(\frac{3}{8}\right) > 0$$

Heraf kan vi konkludere, at det stationære punkt $S_1(0, -2, -1.5)$ er et lokalt minimum.



Øvelse 25

To funktioner f og g er givet ved

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^2 + 8xy \quad \text{og} \quad g(x, y) = x^3 + y^2 + 5xy.$$

- Bestem de stationære punkter for hver af de to funktioner f og g .
- Bestem arten af de stationære punkter, og tegn graferne for hver af de to funktioner.

Øvelse 26

Funktionen f er givet ved $f(x, y) = \frac{xy}{x^2 + y^4 + 1}$.

- Tegn grafen for funktionen f .
- Bestem de stationære punkter for funktionen f .
- Bestem arten af de stationære punkter.

