

AALBORGHUS GYMNASIUM		
Navn	Klasse	År
Maja B	3A	21/22
Sophie	2R	23/24
Silas	2S	25/26

Af Per Gregersen og Henrik Bindebøll Nørregaard

Kernestof

Mat 2 hf

11. Analytisk geometri



11.1 Den rette linje

1 Introduktion

Analytisk geometri blev grundlagt af René Descartes i første halvdel af 1600-tallet. Grundtanken bag var en revolutionerende idé om at kombinere algebra og geometri: at bruge beregninger med koordinater til at studere geometriske figurer som fx linjer og cirkler.

2 Linjens ligning

Vi har tidligere set på rette linjer beskrevet som grafer for funktioner. Hvis linjen er beskrevet ved $y = 3x + 8$, har vi tænkt på y som en funktion af x , så hvis $x = 1$, medfører det, at $y = 11$.

I dette kapitel vil vi betragte x og y som mere ligeværdige. Med den rette linje givet ved ligningen $y = 3x + 8$, mener vi de punkter (x, y) , som gør ligningen sand. Vi kan tjekke, at $(1, 11)$ ligger på linjen, ved at indsætte:

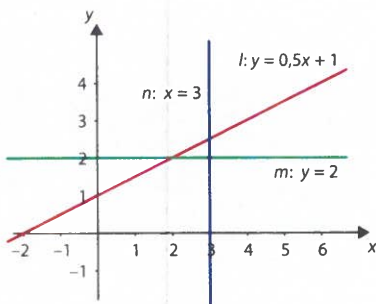
$$\begin{aligned}y &= 3x + 8 \\11 &= 3 \cdot 1 + 8 \\11 &= 11\end{aligned}$$

Vi kan se, at det passer; så $(1, 11)$ ligger på linjen.

Vi kan også prøve med $(4, 7)$:

$$\begin{aligned}y &= 3x + 8 \\7 &= 3 \cdot 4 + 8 \\7 &= 12 + 8 \\7 &= 20\end{aligned}$$

Det sidste er tydeligvis ikke sandt. 7 er ikke lig med 20. Konklusionen er, at punktet $(4, 7)$ *ikke* ligger på linjen!



3 Sætning

Lodrette linjer har ligninger af formen $x = k$, hvor k er et tal.

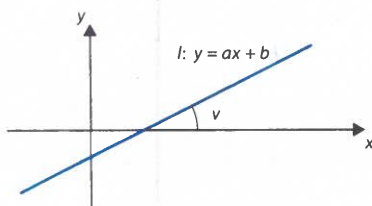
4 Eksempel

I marginen ses linjerne l , m og n .

Den røde linje er givet ved ligningen $l: y = 0,5x + 1$.

Den grønne linje er givet ved $m: y = 2$.

Den blå linje er givet ved $n: x = 3$.



5* Sætning

En linjes **hældningsvinkel**, v , er vinklen fra førsteaksen til linjen regnet med fortegn. Om hældningsvinklen v og hældningskoefficienten a gælder, at $a = \tan(v)$ og $v = \tan^{-1}(a)$.

6 Eksempel

Linjen med ligningen $m: y = 2x - 3$ har hældningsvinklen $v = \tan^{-1}(2) = 63,4^\circ$.

Linjen med ligningen $n: y = -0,3x + 1$ har hældningsvinklen $v = \tan^{-1}(-0,3) = -16,7^\circ$.



7 Eksempel

Linjen l med hældningsvinkel $v = 32^\circ$ har hældningskoefficienten $a = \tan(32^\circ) = 0,62$.

Linjen q med hældningsvinkel $v = -85^\circ$ har hældningskoefficienten

$$a = \tan(-85^\circ) = -11,4.$$

8* Sætning

Linjen gennem punktet $P(x_0, y_0)$ med hældning a har ligningen $y = a \cdot (x - x_0) + y_0$.



9 Eksempel

Linjen l med hældning $a = 2$ går gennem punktet $(x_0, y_0) = (5, -3)$. Ved anvendelse af sætningen får linjen ligningen

$$y = 2 \cdot (x - 5) + (-3)$$

$$y = 2x - 10 - 3$$

$$y = 2x - 13$$

10 Eksempel

Ligningen $8x - 2y + 4 = 0$ definerer også en ret linje. Hvis man isolerer y , får man nemlig $y = 4x + 2$.



11 Øvelse

Beregn hældningsvinklen af linjerne givet ved ligningerne.

a. $y = 7x - 2$

b. $y = -3x + 11$

12 Øvelse

Bestem ligninger for nedenstående linjer

a. Linjen m , som går gennem punktet $(3, 2)$ og har hældningsvinkel $v = 12^\circ$

b. Linjen n , som går gennem $(8, -3)$ og har hældningsvinkel $v = -56^\circ$

c. Linjen q , som går gennem punkterne $(2, -8)$ og $(5, 13)$.

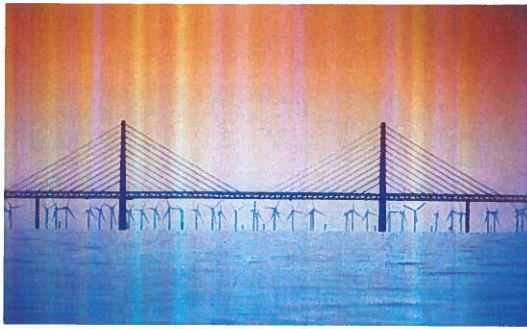
13 Øvelse

a. Isolér y i ligningen $6x + 3y - 15 = 0$, og angiv den tilhørende linjes hældningskoefficient.

Fra teorien om lineære funktioner ved vi, at hældningskoefficienten a kan beregnes med formlen

$$a = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

når (x_1, y_1) og (x_2, y_2) er to punkter på den rette linje.



11.2 Skæring mellem linjer

14 Introduktion

Øresundsbroen er en såkaldt skråstagsbro. Vejbanen hænger i kabler, som er direkte forbundet til de lodrette pyloner. Kablerne og vejbanen kan beskrives som rette linjer. Kablerne er fastgjort, der hvor linjerne skærer hinanden.

15 Bemærkning

To linjer, der ikke er parallelle, vil altid have et skæringspunkt. Skæringspunktets koordinater kan findes ved at løse de to linjers ligninger som to ligninger med to ubekendte.

Skæringspunktet kan også findes ved aflæsning med CAS.

16 Eksempel

Vi vil finde skæringspunktet mellem linjerne givet ved ligningerne

$$y = 2x - 1 \text{ og } y = -x + 8.$$

Først bemærker vi, at linjerne ikke er parallelle, idet deres hældningskoefficienter er forskellige.

Da $y = 2x - 1$, kan vi indsætte $2x - 1$ på y 's plads i $y = -x + 8$. Det giver os $2x - 1 = -x + 8$.

Det er en ligning med kun en ubekendt. Den kan vi løse ved at isolere x :

$$2x - 1 = -x + 8$$

$$2x + x - 1 = 8$$

$$2x + x = 8 + 1$$

$$3x = 9$$

$$x = 3$$

For at finde den tilhørende y -værdi, indsættes $x = 3$ i den ene ligning:

$$y = 2 \cdot 3 - 1 = 6 - 1 = 5$$

Konklusion: De to linjer skærer hinanden i punktet $(3, 5)$.

17 Bemærkning

Vinklen mellem to linjer kan findes ved at trække linjernes hældningsvinkler fra hinanden. Husk at regne vinklerne med fortegn.

18 Eksempel

Vi vil finde vinklen v mellem linjerne $l: y = 2x - 1$ og $m: y = 0,4x + 1$.

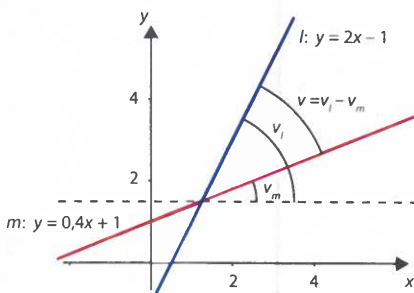
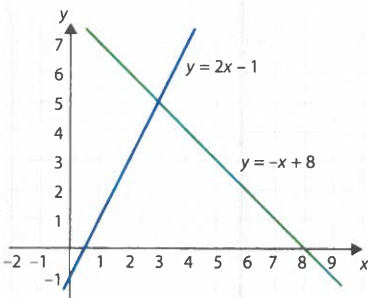
Vi kalder l 's hældningsvinkel for v_l og m 's hældningsvinklen for v_m .

Hældningsvinklerne beregnes først:

$$v_l = \tan^{-1}(2) = 63,43^\circ \text{ og } v_m = \tan^{-1}(0,4) = 21,80^\circ$$

Vinklen kan da beregnes som

$$v = v_l - v_m = 63,43^\circ - 21,80^\circ = 41,63^\circ$$



19 Eksempel

Vi vil finde vinklen v mellem linjerne $l: y = 1,3x - 1$ og $m: y = -0,5x + 3$.

Vi kalder l 's hældningsvinkel for v_l og m 's hældningsvinkel for v_m .

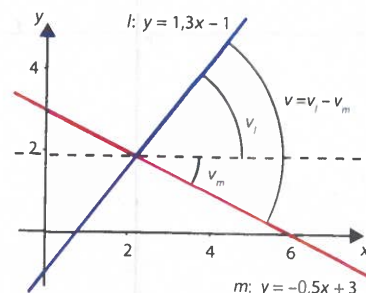
Hældningsvinklerne beregnes først:

$$v_l = \tan^{-1}(1,3) = 52,43^\circ \text{ og } v_m = \tan^{-1}(-0,5) = -26,57^\circ$$

Vinklen kan da beregnes som

$$v = v_l - v_m = 52,43^\circ - (-26,57^\circ) = 79,00^\circ$$

Bemærk, at vinklerne stadig skal trækkes fra hinanden, fordi vi regner vinklerne med fortegn. En negativ hældningskoefficient giver en negativ hældningsvinkel.



20* Sætning

To rette linjer givet ved ligningerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er ortogonale, hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$.

Når skæringsvinklen mellem to linjer er 90° , siger vi at linjerne er **ortogonale**.

21 Eksempel

Et forsyningsfirma skal levere gas til en by. De har allerede en gasledning, som passerer tæt på byen. De indlægger et koordinatsystem på kortet over byen og omegnen. Enhederne på både x - og y -koordinaterne er kilometer. Deres oprindelige gasledning kan beskrives med linjen $l: y = 3x$, og byen ligger i punktet $(30, 10)$. For at den nye gasledning bliver så kort som mulig, skal den gå vinkelret på den gamle gasledning.

Vi kalder linjen, der beskriver den nye gasledning, for $m: y = ax + b$.

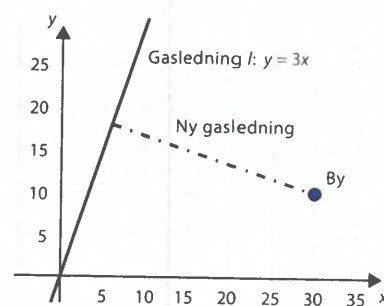
De to linjer er ortogonale, så $3 \cdot a = -1$. Når vi isolerer a , får vi $a = \frac{-1}{3}$.

Ledningen skal gå gennem punktet $(30, 10)$, så ligningen bliver

$$y = \frac{-1}{3} \cdot (x - 30) + 10 = \frac{-1}{3}x + \frac{30}{3} + 10 = \frac{-1}{3}x + 20.$$

Den nye gasledning kan altså beskrives med linjen $m: y = \frac{-1}{3}x + 20$.

For at finde ud af hvor den nye ledning skal tilkobles den gamle, findes de to linjers skæringspunkt. Det giver $(6, 18)$.



22 Øvelse

Betragt linjerne med ligningerne $l: y = 3x - 16$ og $m: y = 2x - 10$

- Find linjernes skæringspunkt ved at løse to ligninger med to ubekendte.
- Tegn, med CAS, linjerne i samme koordinatsystem, og find skæringspunktet med skæringsværktøjet i dit CAS-program.
- Beregn vinklen mellem linjerne med metoden vist i eksemplerne ovenfor.

23 Øvelse

Betragt linjen med ligningen $l: y = 5x - 2$. Punktet $(2, 8)$ ligger på linjen.

- Bestem ligningen for en linje m , der er orthogonal på l , og som går gennem punktet $(2, 8)$.

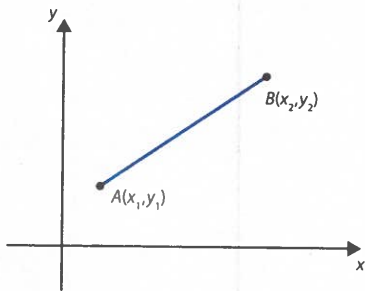


11.3 Afstande

24 Introduktion

I forrige afsnit så vi et eksempel, hvor et forsyningsfirma skulle konstruere en ny gasledning. Her fandt vi en ligning for den linje, som ledningen følger. Men hvor lang skal den nye ledning være? Hvor lang er den korteste afstand fra byen og til den oprindelige gasledning?

I dette afsnit skal vi se på, hvordan man beregner afstande ved hjælp af koordinatgeometri. Vi skal se på afstanden mellem to punkter og på afstanden fra et punkt til en linje.



25* Sætning

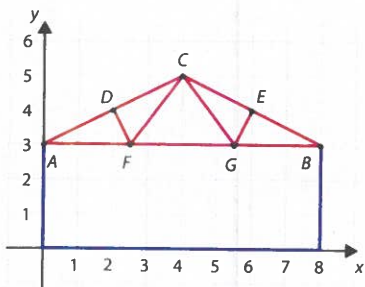
Afstanden mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ kan beregnes med formlen:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

26 Eksempel

Afstanden mellem punkterne $A(5, -2)$ og $B(1, 9)$ er

$$|AB| = \sqrt{(1 - 5)^2 + (9 - (-2))^2} = \sqrt{(-4)^2 + 11^2} = \sqrt{16 + 121} = \sqrt{137} \approx 11,7$$



27 Eksempel

Figuren viser tværsnittet af en tagkonstruktion til et hus. Det er indlagt i et koordinatsystem. Enheden er meter. Vi vil beregne længden af det skrå spær, der går mellem punkterne $B(8, 3)$ og $C(4, 5)$. Vi indsætter i formlen

$$|BC| = \sqrt{(4 - 8)^2 + (5 - 3)^2} = \sqrt{20} \approx 4,47.$$

Det skrå spær skal altså være 4,47 meter langt.

28 Eksempel

Betragt igen tagkonstruktionen. Punktet E skal ligge midt på spærret. Det skal altså ligge midt mellem punkterne B og C . Koordinaterne må derfor være gennemsnittet af koordinaterne til B og C :

$$E\left(\frac{8+4}{2}, \frac{3+5}{2}\right) = E\left(\frac{12}{2}, \frac{8}{2}\right) = E(6, 4).$$

29 Sætning

Midtpunktet M for linjestykket mellem to punkter $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ har koordinaterne

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}\right).$$

30* Sætning (dist-formlen)

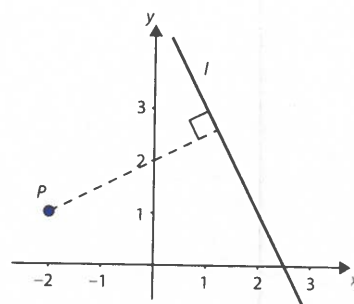
Afstanden fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen med ligningen $l: y = ax + b$ er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

31 Eksempel

Afstanden fra punktet $P(-2, 1)$ til linjen $l: y = -2x + 5$ er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|-2 \cdot (-2) + 5 - 1|}{\sqrt{(-2)^2 + 1}} = \frac{8}{\sqrt{5}} \approx 3,58.$$



32 Løsning ved konstruktion i geometriprogram

Afstanden fra et punkt, P , til en linje, l , kan også findes ved hjælp af konstruktion i et geometriprogram. Fx med følgende 4 trin:

1. Indtegn linjen l og punktet P .
2. Konstruer en linje vinkelret på l og gennem P .
3. Bestem skæringspunktet mellem de to linjer.
4. Bestem afstanden fra P til dette skæringspunkt med måleværktøjet.



33 Øvelse

- a. Beregn afstanden mellem punkterne $A(1, 5)$ og $B(3, 2)$
- b. Bestem koordinaterne til midtpunktet M af linjestykket fra A til B .

34 Øvelse

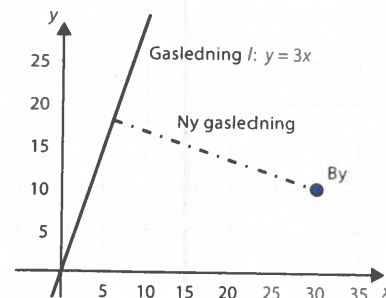
- a. Betragt igen tagkonstruktionen. Beregn længden af det skrå spær, der går mellem punkterne $C(4; 5)$ og $G(5, 5; 3)$.

35 Øvelse

- a. Beregn afstanden fra punktet $P(3, 2)$ til linjen $l: y = 0,5x - 4$ ved hjælp af dist-formlen.
- b. Bestem afstanden fra punktet $Q(5, -2)$ til linjen $m: y = 2x + 4$ ved hjælp af konstruktion i et geometriprogram.

36 Øvelse

- a. Beregn længden af den nye gasledning fra introduktionen. Byen har koordinaterne $(30, 10)$, og den gamle gasledning har ligningen $y = 3x$. Enheden er km.





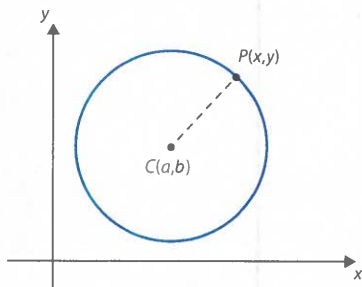
11.4 Cirkler 1

37 Introduktion

Racerbanen Pista di Nardò, som ligger i det sydlige Italien, er formet som en cirkel med radius 2 km.



Vi vil i dette afsnit se på den matematiske beskrivelse af cirkler. En cirkel er en punktmængde, der opfylder den nedenstående ligning. Punktmængden er derved kun cirkelns periferi og altså ikke selve skiven.



38* Sætning

Cirklen med centrum i $C(a,b)$ og med radius r er beskrevet ved ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

39 Eksempel

Cirklen med centrum i punktet $C(2,-4)$ og med radius $\sqrt{7}$ har ligningen

$$(x - 2)^2 + (y - (-4))^2 = \sqrt{7}^2$$

$$(x - 2)^2 + (y + 4)^2 = 7$$

Cirklen kan konstrueres med et geometriprogram, når man kender centrum og radius.

40 Eksempel

Ud fra cirkelns ligning kan vi aflæse centrum's koordinater samt radius.

Betragt cirklen givet ved ligningen $(x + 6)^2 + (y - 4)^2 = 25$

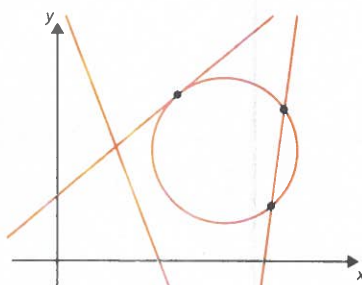
Radius er $r = 5$, fordi vi kan aflæse, at $r^2 = 25$.

Centrum's x -koordinat er $a = -6$. Det kan vi se, fordi $x - a$ skal være lig med $x + 6$.

Det kan kun lade sig gøre, når $a = -6$.

Centrum's y -koordinat er $b = 4$.

Centrum har altså koordinaterne $(-6,4)$.



41 Skæring mellem linje og cirkel

En cirkel og en linje kan enten skære hinanden i to punkter, have ét skæringspunkt, eller slet ikke skære hinanden.

Eventuelle skæringspunkter kan findes ved at substituere linjens ligning ind i cirkelns ligning. Det resulterer i en andengradsligning.

42 Eksempel

Vi vil beregne skæringspunkterne mellem linjen med ligningen $l: y = 2x - 4$, og cirklen givet ved ligningen $(x - 1)^2 + (y - 3)^2 = 25$.

Først substitueres y fra linjens ligning med y i cirkelns ligning:

$$(x - 1)^2 + ((2x - 4) - 3)^2 = 25.$$



Det er nu en ligning med kun en ubekendt. Den kan løses med CAS, eller man kan reducere udtrykket og løse det som en andengradsligning:

$$\begin{aligned}(x-1)^2 + (2x-4-3)^2 &= 25 \\(x-1)^2 + (2x-7)^2 &= 25 \\x^2 + 1^2 - 2 \cdot 1 \cdot x + (2x)^2 + 7^2 - 2 \cdot 2x \cdot 7 &= 25 \\x^2 + 1 - 2x + 4x^2 + 49 - 28x &= 25 \\x^2 + 4x^2 - 2x - 28x + 49 + 1 - 25 &= 0 \\5x^2 - 30x + 25 &= 0 \\x^2 - 6x + 5 &= 0\end{aligned}$$

Kvadratsætninger:

$$(p+q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

og

$$(p-q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$$

Fra næstsidste til sidste linje har vi divideret med 5 på begge sider af lighedstegnet.

Vi står nu med en andengradsligning, som vi kan løse.

Diskriminanten er $d = (-6)^2 - 4 \cdot 1 \cdot 5 = 36 - 20 = 16$.

Diskriminanten er positiv, så der er to løsninger, svarende til, at der er to skæringspunkter.

$$x = \frac{-(-6) \pm \sqrt{16}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} = \begin{cases} \frac{10}{2} = 5 \\ \frac{2}{2} = 1 \end{cases}$$

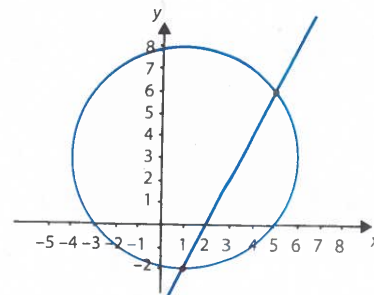
Løsningerne er $x = 5$ og $x = 1$.

Vi skal nu finde de tilsvarende y-kordinater. De findes med linjens ligning.

Når $x = 5$, er $y = 2 \cdot 5 - 4 = 10 - 4 = 6$

Når $x = 1$, er $y = 2 \cdot 1 - 4 = 2 - 4 = -2$

Skæringspunkterne er $(5,6)$ og $(1,-2)$.



43 Øvelse

Racerbanen Pista di Nardò indlægges i et koordinatsystem, så banens centrum får koordinaterne $C(3,3)$. Enheden på koordinaterne er km, så radius er $r = 2$.

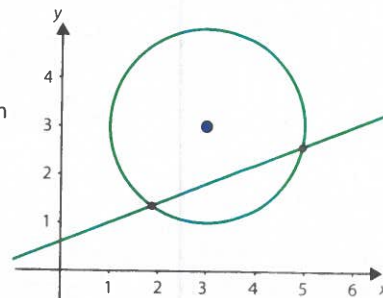
a. Opskriv ligningen for den cirkel, som banen udgør.

En vej krydser banen. Vejen kan beskrives ved den rette linje med ligningen $l: y = 0,4x + 0,6$. De to steder, hvor vejen og banen skærer hinanden, er der en tunnel under racerbanen.

b. Bestem koordinaterne til de to tunneler. Brug ligningsløseren i dit CAS-program.

c. Konstruer situationen med dit geometriprogram, og aflæs skæringspunkterne med det indbyggede skæringsværktøj.

Scan QR-koden for at se hints til løsningen.



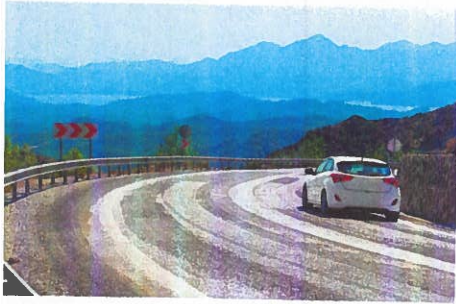
44 Øvelse

En cirkel har centrum i $C(2,-1)$ og har radius $r = \sqrt{5}$.

a. Opskriv en ligning for cirklen.

En linje l har ligningen $l: y = x - 4$

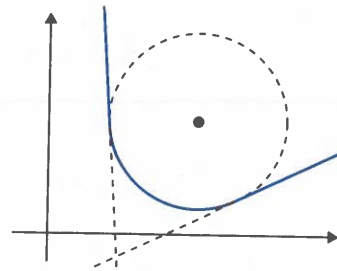
b. Bestem, uden brug af CAS, koordinatsættet til hvert af skæringspunkterne mellem linjen og cirklen.



11.5 Cirkler 2

45 Introduktion

Vejsving konstrueres som cirkelbuer. En cirkelbue er en del af en cirkel. Før og efter svinget er vejen en ret linje. Dette kan fx konstrueres, så de rette linjer er tangenter til cirklen.



46 Definition

En **tangent til en cirkel**, er en ret linje, som rører cirklen i netop ét punkt.

47 Eksempel

Linjen med ligningen $y = 2x + 1$ er tangent til cirklen med ligningen $(x - 3)^2 + (y - 2)^2 = 5$. Se figuren.

Man kan tjekke, om en linje er tangent til en cirkel, ved at beregne afstanden fra linjen og til cirkelns centrum. Hvis der er tale om en tangentlinje, vil denne afstand jo netop være cirkelns radius.

Fra cirkelns ligning kan vi aflæse, at centrum har koordinaterne $C(3,2)$, og at radius er $r = \sqrt{5}$. Vi tjekker:

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|2 \cdot 3 + 1 - 2|}{\sqrt{2^2 + 1}} = \frac{|5|}{\sqrt{5}} = \frac{5}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = \sqrt{5}$$

Vi ser, at afstanden netop er radius.

48 Eksempel

Betragt cirklen med centrum $C(-4,1)$ og radius $r = \sqrt{10}$.

Punktet $P(-1,2)$ ligger på cirklen. Vi ønsker at finde en ligning for tangenten til cirklen i punktet P . For at bestemme ligningen for en linje skal vi bruge en hældningskoefficient a og et punkt på linjen.

Punktet P ligger på tangenten, så vi mangler kun at finde hældningen.

For at finde hældningen vil vi udnytte, at tangenten er ortogonal på linjen fra centrum C til røringspunktet P . Kald hældningen af tangenten for a og hældningen af linjestykket CP for c .

Hældningen af CP kan beregnes ud fra de to punkters koordinater

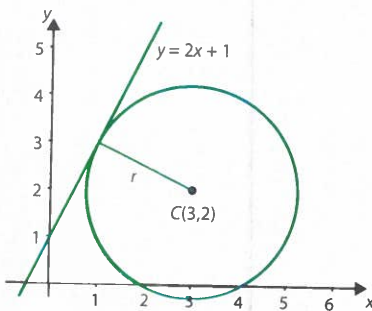
$$c = \frac{2 - 1}{-1 - (-4)} = \frac{1}{-1 + 4} = \frac{1}{3}$$

De to linjer er ortogonale, så

$$a \cdot c = -1$$

$$a \cdot \frac{1}{3} = -1$$

$$a = -3$$



Linjen gennem punktet $P(x_0, y_0)$ med hældning a har ligningen $y = a \cdot (x - x_0) + y_0$.

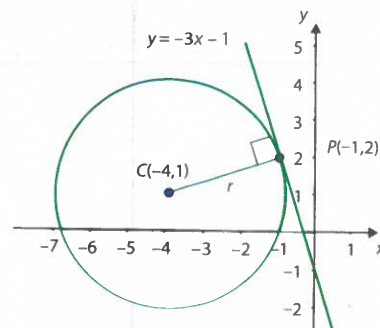


To rette linjer givet ved ligningerne $y = a \cdot x + b$ og $y = c \cdot x + d$ er ortogonale, hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$.

Vi ved nu om tangenten, at den har hældning $a = -3$, og at den går gennem punktet $P(-1,2)$. Vi kan opskrive ligningen

$$\begin{aligned} y &= a \cdot (x - x_0) + y_0 \\ y &= -3 \cdot (x - (-1)) + 2 \\ y &= -3 \cdot (x + 1) + 2 \\ y &= -3 \cdot x - 3 \cdot 1 + 2 \\ y &= -3 \cdot x - 1 \end{aligned}$$

Tangentens ligning er $y = -3x - 1$.



49 Løsning ved konstruktion i geometriprogram

Følg eksempelvis disse 4 trin:

1. Indtegn en cirkel med $C(-4,1)$ og $r = \sqrt{10}$, og afsæt punktet $P(-1,2)$.
2. Konstruer en linje gennem C og P .
3. Afsæt en vinkelret linje til CP , der går gennem P . Dette er tangenten.
4. Benyt programmet til at bestemme ligningen for den fundne tangent.



50 Omskrivning af cirkelns ligning

Ligningen $x^2 - 6x + y^2 + 8y + 16 = 0$ beskriver også en cirkel. Vi kan nemlig omskrive den til formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$ ved at bruge kvadratsætningerne baglæns. Vi genkender leddene $-6x$ og $8y$ som de dobbelte produkter og kan nu lave omskrivningen.

$$\begin{aligned} x^2 - 6x + y^2 + 8y + 16 &= 0 \\ \underbrace{x^2 - 2 \cdot 3 \cdot x + 3^2}_{=(x-3)^2} - 3^2 + \underbrace{y^2 + 2 \cdot y \cdot 4 + 4^2}_{=(y+4)^2} - 4^2 + 16 &= 0 \\ (x-3)^2 - 9 + (y+4)^2 - 16 + 16 &= 0 \\ (x-3)^2 + (y+4)^2 &= 9 \end{aligned}$$

Fra ligningen kan vi nu se, at der er tale om en cirkel med centrum i $(3, -4)$ og med radius 3.

Omskrivningen kan også udføres med CAS. I nogle værktøjer fx med kommandoen `CompleteSquare(x^2 - 6x + y^2 + 8y + 16 = 0, x, y)`

Kvadratsætninger:

$$(p + q)^2 = p^2 + q^2 + 2pq$$

og

$$(p - q)^2 = p^2 + q^2 - 2pq$$



51 Øvelse

En cirkel er givet ved ligningen $(x - 2)^2 + (y - 3)^2 = 5$, og punktet $P(1,5)$ ligger på cirklen.

- a. Bestem ligningen for en tangent til cirklen i punktet P , uden at benytte et geometriprogram.
- b. Tjek din løsning ved at beregne afstanden fra centrum til din tangentlinje.
- c. Bestem også tangentens ligning vha. et geometriprogram.

52 Øvelse

En cirkel er beskrevet ved ligningen $x^2 + 2x + y^2 - 4y = 11$

- a. Omskriv ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- b. Angiv cirkelns radius og koordinaterne til centrum.



11.6 Beviser 1

53 Introduktion

I afsnittet her skal vi bevise sætninger om linjer og linjers hældning. Vi skal bl.a. se nærmere på, hvordan den trigonometriske funktion tangens kan bruges til at sammenknytte en linjes hældningskoefficient med dens hældningsvinkel. Derved skal vi også rundt om en række trigonometriske begreber og indsigter om retvinklede trekanter og om to overgangsformler om sinus og cosinus, som bedst kan forstås ud fra enhedscirklen.

[5 Sætning]

En linjes hældningsvinkel, v , er vinklen fra førsteaksen til linjen regnet med fortegn. Om hældningsvinklen v og hældningskoefficienten a gælder, at

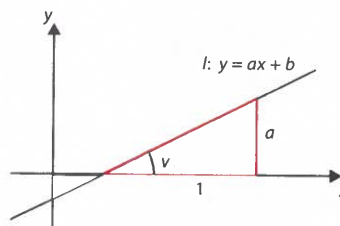
$$a = \tan(v) \text{ og } v = \tan^{-1}(a)$$

54 Bevis for sætning 5

Vi deler beviset op i tre tilfælde: Linje med positiv hældning, vandret linje og linje med negativ hældning:

Positiv hældning: $a > 0$.

Hældningskoefficienten er netop defineret som ændringen i y -koordinaten, når x -koordinaten får en tilvækst på 1. Det giver os en retvinklet trekant, som er tegnet med rød.



Ved at bruge tangens for retvinklede trekanter får vi

$$\tan(v) = \frac{a}{1}, \text{ som kan forkortes til } \tan(v) = a.$$

Vinklen ligger i intervallet $]0;90[$, så når $\tan(v) = a$, kan vi finde vinklen som $v = \tan^{-1}(a)$.

Vandret linje: $a = 0$.

Hvis linjen er vandret, er hældningsvinklen $v = 0^\circ$. Da $\tan(0) = 0$, gælder formlen også i dette tilfælde.

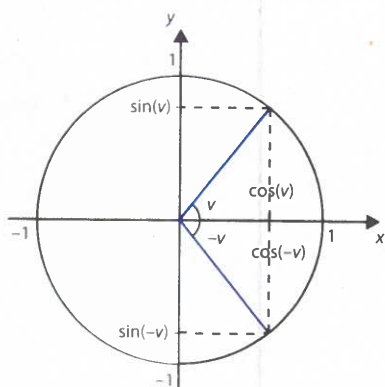
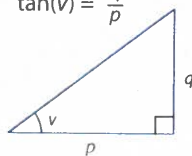
Negativ hældning: $a < 0$

Først skal vi en lille tur omkring enhedscirklen, som vi også beskæftigede os med i *Kernestof 1*. Ud fra enhedscirklen i marginen kan vi se, at $\sin(-v) = -\sin(v)$, og at $\cos(-v) = \cos(v)$. Det giver os følgende om tangens:

$$\tan(-v) = \frac{\sin(-v)}{\cos(-v)} = \frac{-\sin(v)}{\cos(v)} = -\frac{\sin(v)}{\cos(v)} = -\tan(v)$$

Tangens i retvinklet trekant.

$$\tan(v) = \frac{q}{p}$$



Heraf kan vi konkludere, at hvis vi tager tangens til en negativ vinkel, får vi et negativt tal, så længe vinklen ligger i intervallet $]-90;0[$. Omvendt vil $\tan^{-1}(a)$, hvor a er en negativ hældning, også give en negativ hældningsvinkel.

Formlen gælder altså også for negative hældningskoefficienter og negative hældningsvinkler.

Hermed er sætningen bevist.

[8 Sætning]

Linjen gennem punktet $P(x_0, y_0)$ med hældningen a har ligningen $y = a \cdot (x - x_0) + y_0$.

55 Bevis for sætning 8

Linjens ligning er $y = a \cdot x + b$.

Punktet $P(x_0, y_0)$ ligger på linjen, så der vil gælde, at $y_0 = a \cdot x_0 + b$.

Vi isolerer b ved at trække $a \cdot x_0$ fra på begge sider: $b = y_0 - a \cdot x_0$.

Dette udtryk for b kan vi nu indsætte i linjens ligning og omskrive.

$$y = a \cdot x + b$$

$$y = a \cdot x + y_0 - a \cdot x_0$$

$$y = a \cdot x - a \cdot x_0 + y_0$$

$$y = a \cdot (x - x_0) + y_0$$

Sidste linje er netop, hvad vi gerne ville vise, og beviset er dermed slut.

56 Øvelse

- Skriv begge beviser ned på papir, og forklar udregningerne og ræsonnementerne med egne kommentarer rundt omkring.



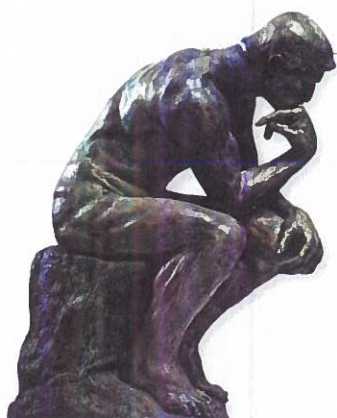
Sætte uden for en parentes:

I udtrykket $p \cdot q - p \cdot r$

ser vi, at p er en fælles faktor i de to led.

Vi kan derfor sætte p udenfor parentes og har:

$$p \cdot q - p \cdot r = p \cdot (q - r)$$



11.7 Beviser 2

57 Introduktion

I dette afsnit skal vi bevise sætningen om, at hvis to linjer er ortogonale, så vil produktet af deres hældningskoefficienter give -1 . I beviset bruges Pythagoras' sætning på to forskellige måder. Dels på den sædvanlige måde, hvor vi bruger sætningen til at knytte en forbindelse mellem sidelængderne i en retvinklet trekant, og dels omvendt, hvor man ud fra en viden om sammenhængen mellem en trekants sidelængder kan konkludere, at den må være retvinklet. Denne sidste påstand bevises til sidst i afsnittet.

[20 Sætning]

To rette linjer givet ved ligningerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er ortogonale, hvis og kun hvis $a \cdot c = -1$.

58 Bevis for sætning 20

Beviset deles op i to.

Først vil vi bevise, at hvis linjerne er ortogonale, så medfører det, at $a \cdot c = -1$. Dernæst vil vi bevise, at hvis $a \cdot c = -1$, så medfører det, at linjerne er ortogonale.

Første del:

Vi antager, at linjerne $y = ax + b$ og $y = cx + d$ er ortogonale.

På figuren har vi indtegnet de to linjer samt to retvinklede trekanter ABD og ADC . Da linjerne er ortogonale, vil også trekanten ABC være retvinklet.

Vi kan også se, at hvis de er ortogonale, må den ene hældning være positiv og den anden negativ. På tegningen er a positiv, og c negativ.

Vi vil benytte Pythagoras' sætning i de tre trekanter:

$\triangle ADC$: Siden AC er hypotenusen. Vi har sat sidelængden på AD til 1, således at længden af DC netop er hældningskoefficienten a .

$$|AC|^2 = |AD|^2 + |DC|^2 = 1^2 + a^2 = 1 + a^2$$

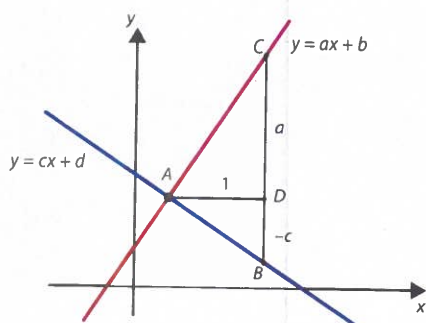
$\triangle ABD$: Siden AB er hypotenusen. Hældningen c er negativ, så længden af DB er $-c$.

$$|AB|^2 = |AD|^2 + |DB|^2 = 1^2 + (-c)^2 = 1 + c^2$$

Bemærk, at disse to resultater om $|AB|$ og $|AC|$ gælder, uanset om linjerne er ortogonale eller ej.

$\triangle ABC$: Længden af AB og AC har vi netop fundet. Længden af BC er

$$|BC| = a + (-c) = a - c$$



Pythagoras' sætning giver nu

$$\begin{aligned} |BC|^2 &= |AB|^2 + |AC|^2 \\ (a-c)^2 &= (1+c^2) + (1+a^2) \\ a^2 + c^2 - 2ac &= 1 + c^2 + 1 + a^2 \\ -2ac &= 2 \\ ac &= \frac{2}{-2} \\ ac &= -1 \end{aligned}$$

Vi har nu vist, at hvis linjerne er ortogonale, er $ac = -1$.

Anden del:

Vi antager, at $ac = -1$.

Beviset går ud på at lave de sidste beregninger fra første del baglæns:

$$\begin{aligned} ac &= -1 \\ ac &= \frac{2}{-2} \\ -2ac &= 2 \\ a^2 + c^2 - 2ac &= 1 + c^2 + 1 + a^2 \\ (a-c)^2 &= (1+c^2) + (1+a^2) \\ |BC|^2 &= |AB|^2 + |AC|^2 \end{aligned}$$

Vi kan nu benytte den omvendte Pythagoras' sætning til at konkludere, at trekant ABC er retvinklet, og at den rette vinkel er A .

Hermed er det vist, at linjerne er ortogonale, og beviset er dermed slut.

59 Den omvendte Pythagoras' sætning

Hvis der gælder om tre sider a , b og c i en trekant, at $c^2 = a^2 + b^2$, så er trekanten retvinklet, og det er vinklen over for siden c , som er ret.

60 Bevis for sætning 59

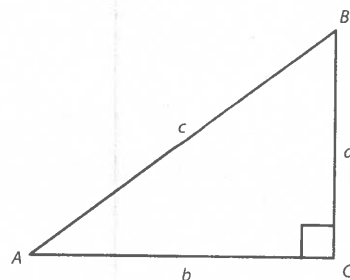
Vi tager udgangspunkt i cosinusrelationen $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos(C)$.

Denne cosinusrelation vil være identisk med Pythagoras' sætning, hvis det sidste led $-2ab\cos(C) = 0$.

Størrelserne a og b er sidelængder, som ikke kan være lig med nul, og $\cos(C)$ er kun lig med 0, hvis $C = 90^\circ$ (hvis vi kun leder blandt trekantsvinklerne mellem 0 og 180°).

Dermed har vi vist, at hvis $c^2 = a^2 + b^2$, så er $C = 90^\circ$, og trekanten er dermed retvinklet.

Beviset er slut.





11.8 Beviser 3

61 Introduktion

I dette afsnit skal vi bevise sætningen om afstanden mellem to punkter. I beviset inddrages begrebet numerisk værdi og en påstand om, hvordan man kan bestemme afstanden mellem to tal a og b på talaksen. Vi behandler først begrebet numerisk værdi og påstanden om afstand mellem de to tal, inden selve beviset gennemgås.

62 Definition

Numerisk værdi er en stykkevist defineret funktion:

$$|x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$$

63 Eksempel

$$|-3| = -(-3) = 3 \text{ og endvidere } |3| = 3$$

$$|8-3| = |5| = 5 \text{ og endvidere } |3-8| = |-5| = 5$$

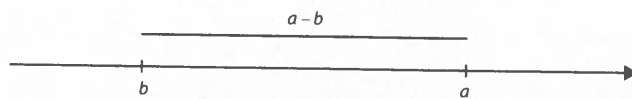
Vi ser altså, at det at tage den numeriske værdi populært sagt betyder, at "gøre positiv".

64 Sætning

Afstanden mellem to tal a og b på tallinjen, er $|a - b|$.

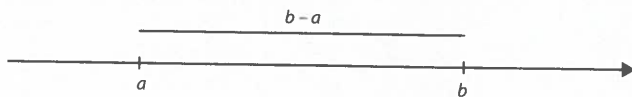
65 Bevis for sætning 64

Hvis $a > b$, er afstanden $a - b$. Det er et positivt tal, så $|a - b| = a - b$.



Hvis $b > a$, er afstanden $b - a$. Men så er $a - b$ et negativt tal, så

$$|a - b| = -(a - b) = -a + b = b - a$$



I begge tilfælde giver $|a - b|$ altså afstanden mellem a og b .

Hjælpesætningen er hermed bevist.



Vi er nu klar til beviset for afstandsformlen.

[25 Sætning]

Afstanden mellem to punkterne $A(x_1, y_1)$ og $B(x_2, y_2)$ er

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

66 Bevis for sætning 25

Betragt figuren.

Afstanden mellem A og B er længden af det røde linjestykke.

Vi kan danne en retvinklet trekant ved at tegne en lodret linje gennem A og en vandret linje gennem B . Disse to linjers skæringspunkt kalder vi C .

Trekant ABC er retvinklet, så vi kan anvende Pythagoras' sætning

$$|AB|^2 = |CB|^2 + |AC|^2$$

$$|AB|^2 = |x_2 - x_1|^2 + |y_2 - y_1|^2$$

$$|AB|^2 = (x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2$$

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$$

Det sidste er netop, hvad vi skulle vise, og beviset er dermed slut.

I beviset har vi antaget, at linjestykket AB ikke er parallelt med akserne. Formlen gælder dog også i disse tilfælde. Hvis fx AB er parallel med x -aksen (svarende til at $y_1 = y_2$), er afstanden $|x_2 - x_1|$.

Formlen giver det samme:

$$|AB| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_1 - y_1)^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + 0^2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2} = |x_2 - x_1|$$

67 Øvelse

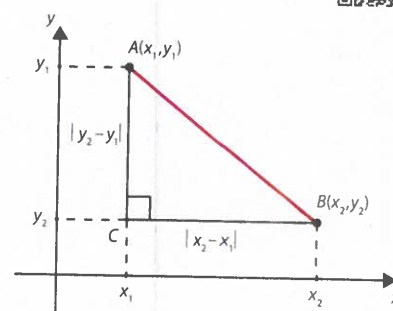
- Bestem den numeriske værdi af tallene 4, -6 og -0,2.
- Bestem den numeriske værdi af $4 - 9$ og $6 - 4$.

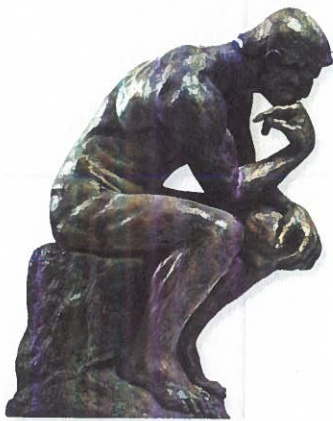
68 Øvelse

- Bestem afstanden mellem tallene 8 og 3 og mellem -3 og 11.
- Tegn en tallinje, og afsæt tallene på den. Illustrer svarene til spm. a. på tallinjen.

69 Øvelse

- Tegn grafen for $f(x) = |x| = \begin{cases} x & , x \geq 0 \\ -x & , x < 0 \end{cases}$





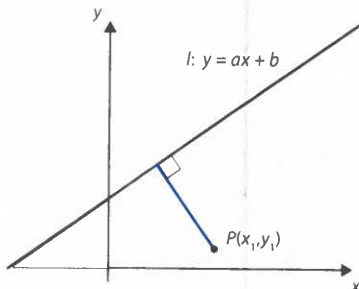
11.9 Beviser 4

70 Introduktion

I dette afsnit begynder vi med at bevise sætningen om, hvordan man kan beregne afstanden mellem en linje og et punkt med kendte koordinater.

I beviset for afstandsformlen udnyttes, at hvis to trekanter er ligedannede, er der en bestemt skalafaktor mellem længderne af parvist ensliggende sider i trekanterne. En anden måde at sige det på er, at forholdet mellem ensliggende siders længder er konstant.

Til sidst i afsnittet udledes cirkelns ligning ud fra en anden afstandsformel, nemlig den der gælder for afstanden mellem to punkter.



[30 Sætning (dist-formlen)]

Afstanden fra punktet $P(x_1, y_1)$ til linjen med ligningen $l: y = ax + b$ er

$$\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

71 Bevis for sætning 30

Den søgte afstand er den korteste afstand mellem punktet og linjen. Det er altså afstanden mellem punktet P og punktet R på tegningen: $|PR|$. Hvis vi tegner et lodret linjestykke fra P til linjen l og kalder skæringspunktet med linjen for Q , danner PQR en retvinklet trekant.

Vi konstruerer nu en anden retvinklet trekant ABC ud fra et tilfældigt punkt C på linjen l . Vi sørger for, at $|CA| = 1$, således at $|AB| = |a|$, hvor a er linjens hældningskoefficient.

De to trekanter PQR og ABC er ensvinklede, da de begge er retvinklede, og $\angle PQR = \angle ABC$.

Da de to trekanter er ensvinklede, kan vi konkludere, at

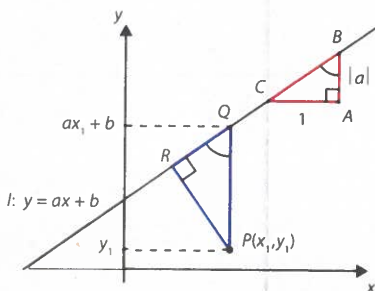
$$\frac{|PR|}{|CA|} = \frac{|PQ|}{|CB|}$$

Vi er på jagt efter afstanden $|PR|$, så den isoleres

$$|PR| = |CA| \cdot \frac{|PQ|}{|CB|}$$

Det lodrette linjestykke PQ har længden $|PQ| = |ax_1 + b - y_1|$.

Vi har allerede fastslået, at $|CA| = 1$.



Længden af linjestykket CB kan beregnes med Pythagoras' sætning i trekant ABC :

$$|CB|^2 = |AB|^2 + |CA|^2$$

$$|CB|^2 = |a|^2 + 1^2$$

$$|CB|^2 = a^2 + 1$$

$$|CB| = \sqrt{a^2 + 1}$$

Vi kan nu indsætte $|CA|$, $|PQ|$ og $|CB|$ i udtrykket for $|PR|$

$$|PR| = |CA| \cdot \frac{|PQ|}{|CB|}$$

$$|PR| = 1 \cdot \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

$$|PR| = \frac{|ax_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

Da $|PR|$ netop er den søgte afstand, har vi vist, at $\text{dist}(P, l) = \frac{|a \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{a^2 + 1}}$

Vi har i det ovenstående antaget, at linjen ikke er vandret. Hvis linjen er vandret, er afstanden $|b - y_1|$. Formlen giver det samme:

$$\frac{|0 \cdot x_1 + b - y_1|}{\sqrt{0^2 + 1}} = \frac{|b - y_1|}{\sqrt{1}} = \frac{|b - y_1|}{1} = |b - y_1|$$

Hermed er sætningen bevist.

Vi vil nu udlede cirkelns ligning ud fra afstandsformlen for afstanden mellem to punkter.

En cirkel er i matematisk forstand en punktmængde, hvor alle punkter ligger i samme afstand til centrum. Punktmængden udgør altså det, vi også kalder periferien.

[38 Sætning]

Cirklen med centrum i $C(a, b)$ og med radius r er beskrevet ved ligningen

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2.$$

72 Bevis for sætning 38

Betragt et løbende punkt $P(x, y)$ på cirkelperiferien.

Afstanden $|CP|$ mellem dette punkt og centrum $C(a, b)$ må netop være radius r .

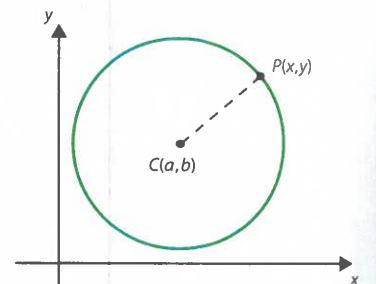
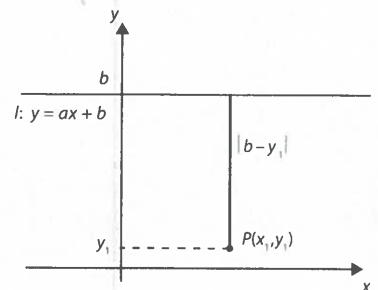
Vi indsætter i afstandsformlen:

$$|CP| = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$r = \sqrt{(x - a)^2 + (y - b)^2}$$

$$r^2 = (x - a)^2 + (y - b)^2$$

Vi er kommet frem til cirkelns ligning, og beviset er dermed slut.





Scan QR-koden for at komme til facitlisten.

Opgave 1101

- Undersøg om punktet (2,1) ligger på linjen givet ved ligningen $y = 3x - 5$.
- Undersøg, om punktet (3,5) ligger på linjen givet ved ligningen $5x - 2y - 5 = 0$.
- Undersøg, om punktet (3,2) ligger på linjen givet ved ligningen $y = -4x + 11$.

Opgave 1102

Bestem hældningsvinklen for linjerne givet ved ligningerne

- $y = 3x - 2$
- $y = -2x + 1$
- $y = 0,4x - 3,6$
- $y = -\frac{4}{5}x + 11$
- $y = 3 - 0,01x$
- $y = 6$
- $3x + 6y - 3 = 0$
- $x = 2$

Opgave 1103

Bestem ligninger for nedenstående linjer

- En linje med hældningskoefficient 3, som går gennem punktet (4,1).
- En linje med hældningskoefficient -5, som går gennem punktet (-1,7).
- En linje med hældningskoefficient $\frac{2}{5}$, som går gennem punktet (9,2).
- En linje med hældningsvinkel 32° , som går gennem punktet (-3,6).
- En linje med hældningsvinkel -76° , som går gennem punktet (8,15).
- En linje med hældningsvinkel -89° , som går gennem punktet (1,3).
- En linje, som går gennem punkterne (2,7) og (5,-2).

Opgave 1104

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = 3x - 1 \text{ og } m: y = 2x + 1.$$

- Bestem skæringspunktet mellem linjerne uden CAS.
- Tegn linjerne på ternet papir uden brug af CAS.
- Bestem vinklen mellem linjerne.

Opgave 1105

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = 5x - 16 \text{ og } m: y = -2x + 5.$$

- Bestem skæringspunktet mellem linjerne uden CAS.
- Bestem vinklen mellem linjerne.

Opgave 1106

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = -x + 3 \text{ og } m: y = -3x - 1.$$

- Bestem skæringspunktet mellem linjerne uden CAS.
- Bestem vinklen mellem linjerne.

Opgave 1107

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = 0,3x + 12,1 \text{ og } m: y = -3,5x + 1.$$

- Tegn linjerne i samme koordinatsystem med CAS.
- Bestem skæringspunktet mellem linjerne med CAS.
- Bestem vinklen mellem linjerne.

Opgave 1108

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = \frac{1}{17}x + \frac{6}{13} \text{ og } m: y = -2x + \frac{12}{11}.$$

- Tegn linjerne i samme koordinatsystem med CAS.
- Bestem skæringspunktet mellem linjerne med CAS.
- Bestem vinklen mellem linjerne.

Opgave 1109

To linjer n og m er givet ved ligningerne

$$n: y = 8x - 2 \text{ og } m: y = 7x + 3.$$

- a. Bestem linjernes skæringspunkt ved at løse to ligninger med to ubekendte med CAS.

Opgave 1110

Afgør, uden brug af CAS, om nedenstående par af linjer er ortogonale eller ej.

- a. $y = 2x + 11$ og $y = 4x - 1$
b. $y = 5x + 3$ og $y = \frac{1}{5}x + 2$
c. $y = -3x + 1$ og $y = \frac{-1}{3}x - 11$
d. $y = 0,25x + 10$ og $y = -4x + 3$

Opgave 1111

En linje er givet ved ligningen $l: y = 5x + 3$.

- a. Bestem, uden CAS, ligningen for den linje, der er ortogonal til l og som går gennem punktet $P(2,13)$.
b. Bestem ved konstruktion i CAS, ligningen for den linje der er ortogonal til l og som går gennem punktet $Q(1,8)$.

Opgave 1112

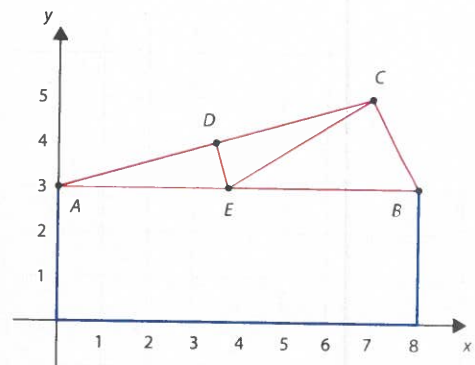
- a. Bestem, uden CAS, afstanden mellem punkterne $P_1(4, 3)$ og $P_2(8, 6)$.
b. Bestem, med CAS, afstanden mellem punkterne $P_1(9, 1)$ og $P_2(34, -3)$.
c. Bestem, med CAS, afstanden mellem punkterne $P_1(-4, 2)$ og $P_2(-8, -5)$.

Opgave 1113

Punkterne P og Q har koordinaterne $P(5, 1)$ og $Q(-11, 7)$.

- a. Bestem længden af linjestykket PQ .
b. Bestem koordinaterne til punktet R , som ligger midt mellem P og Q .

Opgave 1114



Figuren viser tværsnittet af tagkonstruktionen til et hus. Det er indlagt i et koordinatsystem. Enheden er meter.

Punkterne A , B og C har koordinaterne $A(0,3)$, $B(8,3)$ og $C(7,5)$.

- a. Konstruer trekant ABC i dit geometriprogram.
b. Mål længden af linjestykket AB med dit geometriprogram.
c. Mål $\angle BAC$ med dit geometriprogram.

Punktet D ligger midt på linjestykket AC .

- d. Bestem D 's koordinater med dit geometriprogram.

Linjestykket DE er ortogonalt på linjestykket AC .

- e. Konstruer linjestykket DE , og bestem koordinaterne til punktet E , som er skæringspunktet mellem DE og AB .

- f. Bestem længden af det skrå spær EC .

Opgave 1115

Bestem afstandene mellem nedenstående punkter og linjer ved hjælp af dist-formlen.

- a. Afstanden mellem punktet $P_1(4, 2)$ og linjen $l_1: y = 8x + 2$.
b. Afstanden mellem punktet $P_2(15, -11)$ og linjen $l_2: y = x + 5$.
c. Afstanden mellem punktet $P_3(-1, -6)$ og linjen $l_3: y = -\frac{1}{3}x + 4$.

Opgave 1116

Bestem afstandene mellem nedenstående punkter og linjer ved hjælp af konstruktion i dit geometriprogram.

- Afstanden mellem punktet $P_1(3, 2)$ og linjen $l_1: y = 5x - 3$.
- Afstanden mellem punktet $P_2(-10, 3)$ og linjen $l_2: y = -3x + 15$.
- Afstanden mellem punktet $P_3(4, -9)$ og linjen $l_3: y = 0,7x + 3,9$.

Opgave 1117

En trekant er udspændt af punkterne $A(1, 6)$, $B(2, 3)$ og $C(5, 1)$.

- Bestem længden af siden AC .
- Bestem længden af højden h fra punktet B til siden AC , ved hjælp af dist-formlen.
- Benyt resultaterne ovenfor til at bestemme arealet af trekant ABC .

Opgave 1118

Bestem en ligning for nedenstående cirkler.

- En cirkel med centrum i $(3, 1)$ og radius 5.
- En cirkel med centrum i $(-2, 6)$ og radius 2.
- En cirkel med centrum i $(4, -9)$ og radius $\sqrt{8}$.

Opgave 1119

Konstruer nedenstående cirkler med dit geometriprogram. Aflæs deres ligninger.

- En cirkel med centrum i $(4, 8)$ og radius 3.
- En cirkel med centrum i $(6, -1)$ og radius $\sqrt{10}$.
- En cirkel med centrum i $(2, -7)$. Derudover oplyses det, at punktet $(3, 1)$ ligger på cirklen.

Opgave 1120

Hvilke af nedenstående punkter ligger på cirklen med ligningen $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 13$.

- $(0, 0)$
- $(1, 2)$
- $(4, 0)$
- $(-2, 4)$

Opgave 1121

Angiv radius og centrums koordinater til nedenstående cirkler.

- $(x - 3)^2 + (y - 5)^2 = 16$
- $(x - 10)^2 + (y - 8)^2 = 5$
- $(x + 3)^2 + (y - 2)^2 = 11$
- $(x - 1)^2 + (y + 7)^2 = 25$
- $(x + 5)^2 + (y + 16)^2 = 3$

Opgave 1122

En cirkel C og en linje l er givet ved ligningerne

$$C: (x - 3)^2 + (y + 2)^2 = 12 \text{ og } l: y = -x + 4$$

- Tegn cirklen og linjen i dit geometriprogram.
- Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Opgave 1123

En cirkel C og en linje l er givet ved ligningerne

$$C: (x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 27 \text{ og } l: y = 3x + 8$$

- Tegn cirklen og linjen i dit geometriprogram.
- Bestem skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Opgave 1124

En cirkel C og en linje l er givet ved ligningerne

$$C: (x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 18 \text{ og } l: y = x + 1$$

- Bestem, uden brug af CAS, skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Opgave 1125

En cirkel C og en linje l er givet ved ligningerne

$$C: (x + 3)^2 + (y - 6)^2 = 5 \text{ og } l: y = x + 6.$$

- Bestem, uden brug af CAS, skæringspunkterne mellem cirklen og linjen.

Opgave 1126

- Er linjen $y = 3x - 5$ tangent til cirklen med ligningen $(x - 4)^2 + (y + 3)^2 = 10$?

- Er linjen $y = 3,5x - 5$ tangent til cirklen med ligningen $(x + 5)^2 + (y - 4)^2 = 53$?

- Er linjen $y = -1,5x + 11$ tangent til cirklen med ligningen $(x - 3)^2 + (y - 1)^2 = 13$?

Opgave 1127

Løs opgaverne ved konstruktion i dit geometriprogram.

- En cirkel er givet ved ligningen $(x - 5)^2 + (y - 2)^2 = 20$. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet (1,4).
- En cirkel er givet ved ligningen $(x - 8)^2 + (y + 2)^2 = 40$. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet (2,-4).
- En cirkel har centrum i $C(-5,-1)$ og radius $r = \sqrt{40}$. Bestem ligningen for en tangent til cirklen i punktet (-3,5).

Opgave 1128

Løs opgaverne uden brug af CAS.

- En cirkel er givet ved ligningen $(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 10$. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet (5,2).
- En cirkel er givet ved ligningen $(x - 7)^2 + (y + 1)^2 = 5$. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet (6,-3).
- En cirkel er givet ved ligningen $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 13$. Bestem ligningen for tangenten til cirklen i punktet (-2,1).

Opgave 1129

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + 6x + y^2 + 4y - 3 = 0.$$

- Omskriv, med CAS, ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1130

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y = -4.$$

- Omskriv, med CAS, ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1131

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 - 10y + 22 = 0.$$

- Tegn cirklen med dit geometriprogram.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1132

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 + 2x + y^2 + 4y = 20.$$

- Tegn cirklen med dit geometriprogram.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1133

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 - 8y + 16 = 0.$$

- Omskriv, uden CAS, ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1134

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 - 6x + y^2 - 8y = 0.$$

- Omskriv, uden CAS, ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

Opgave 1135

En cirkel er beskrevet ved ligningen

$$x^2 - 4x + y^2 + 6y = 3.$$

- Omskriv, uden CAS, ligningen, så den er på formen $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$.
- Angiv cirkelns radius og centrumskordinater.

FACIT TIL OPGAVER

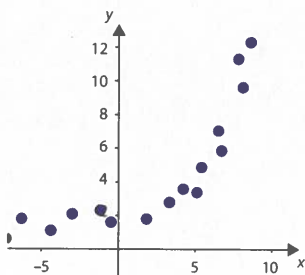
alspredningen er 12,8.

tionen giver forskriften $f(x) = 0,2x + 69,2$



alspredningen er 0,39.

ædere model lader til at være anvendelig, lualplottet synes at være tilfældigt for- residualspredningen på 0,39 er meget spændet i y-værdier.



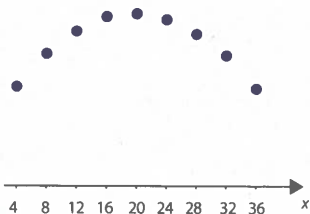
sionerne giver forskrifterne:

$$= 0,58x + 3,28$$

$$= 0,08x^2 + 0,42x + 1,09$$

$$= 0,01x^3 + 0,05x^2 - 0,05x + 1,66$$

rads-regressionen passer bedst.



b) $a = -0,03$, $b = 1,18$, $c = 6,06$

c) 42,1 meter

11. Analytisk geometri

11

a) $81,9^\circ$

b) $-71,6^\circ$

12

a) $y = 0,21x + 1,36$

b) $y = -1,48x + 8,86$

c) $y = 7x - 22$

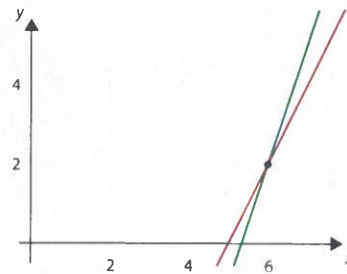
13

a) $y = -2x + 5$, dvs. hældningskoefficienten er -2 .

22

a) Skæringspunktet er $(6,2)$

b)



c) $8,13^\circ$

23

a) $m: y = -0,2x + 8,4$

33

a) Afstanden er 3,6.

b) $(2; 3,5)$

34

a) Længden er 2,5 meter.

35

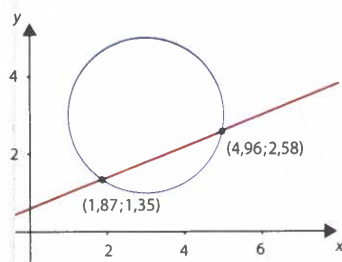
- a) Afstanden er 4,02.
- b) Afstanden er 7,16.

36

- a) 25,3 km

43

- a) $(x - 3)^2 + (y - 3)^2 = 2^2$
- b) (1,87; 1,35) og (4,96; 2,58)
- c)



44

- a) $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 = 5$
- b) (1; -3) og (4; 0)

51

- a) $l: y = 0,5x + 4,5$
- b) Afstanden fra centrum til tangentlinjen er $\sqrt{5}$.
- c) Samme som fundet i opg. a.

52

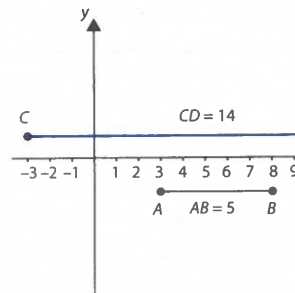
- a) $(x + 1)^2 + (y - 2)^2 = 4^2$
- b) Radius er 4 og centrum-kordinaterne er (-1, 2).

67

- a) Den numeriske værdi er hhv. 4, 6 og 0,2.
- b) Den numeriske værdi er hhv. 5 og 2.

68

- a) Afstanden er hhv. 5 og 14.
- b)



69

- a)

