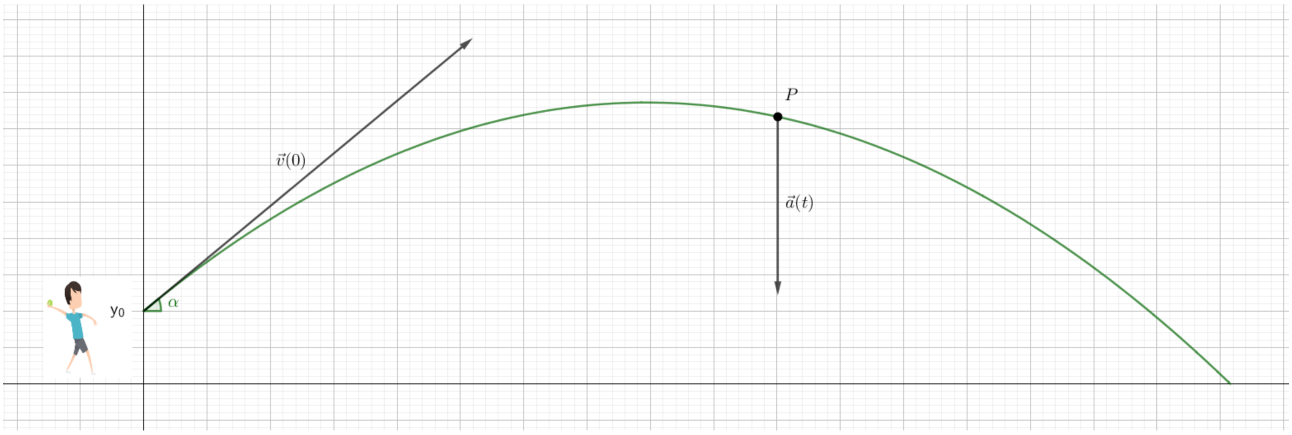
Det skrå kast uden luftmodstand

Vi vil opstille en parameterfremstilling for en vektorfunktion $\vec{r}(t)$, som beskriver det skrå kast uden luftmodstand som funktion af tiden t.

Betragt figuren herunder (her kan man se en sød dreng fra 3 MA/2, som skal til at kaste en bold):



Vi husker, at der generelt om hastighedsvektoren $\vec{v}(t)$ gælder, at

$$\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$$

og om accelerationsvektoren $\vec{a}(t)$ gælder

$$\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t) = \vec{r}\,''(t)$$

Vi antager tre ting om kastet:

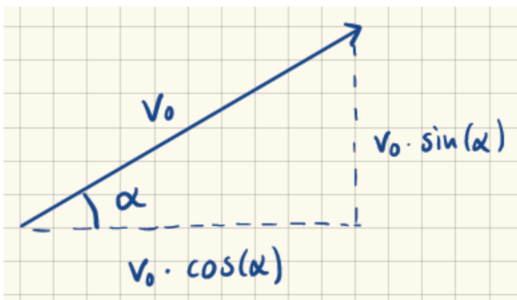
1) Bolden slippes i punktet $(0, y_0)$. Det vil sige, at til tiden $t = 0$ er

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

2) Bolden kastes med en begyndelsesfart på v_0 og den vinkel, som hastighedsvektoren til tiden 0 danner med vandret, kalder vi for α (se også figuren). Denne vinkel kaldes også for elevationsvinklen.

   Det betyder, at starthastigheden er

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$



3) Endelig antager vi, at den eneste kraft, som påvirker bolden, er tyngdekraften (altså at der ikke er nogen luftmodstand). Det betyder, at der til ethvert tidspunkt t gælder, at accelerationsvektoren er

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

   hvor $g = 9{,}82\ m/s^2$ her i Danmark.

Vi vil nu bevise, at

Boldens position til tiden t kan beskrives ved vektorfunktionen

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

og at banekurven for denne vektorfunktion er sammenfaldende med parablen med ligning

$$y = -\frac{g}{2 \cdot v_0^2 \cdot (\cos(\alpha))^2} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

Fra antagelserne ved vi, at

$$\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$$

og $\vec{a}(t) = \vec{v}\,'(t)$. Dvs. vi skal finde en hastighedsvektor $\vec{v}(t)$, som differentieret giver $\vec{a}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}$. Vi integrerer derfor hver af koordinatfunktionerne for accelerationsvektoren med hensyn til t og får

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} k_1 \\ -g \cdot t + k_2 \end{pmatrix}$$

hvor k_1 og k_2 er konstanten. Indsættes $t = 0$, har vi

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$

og samtidig ved vi fra antagelserne, at

$$\vec{v}(0) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\,(\alpha) \\ v_0 \cdot \sin\,(\alpha) \end{pmatrix}$$

Det må betyde, at

$$k_1 = v_0 \cdot \cos(\alpha)$$

og

$$k_2 = v_0 \cdot \sin\,(\alpha)$$

Altså er

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos\,(\alpha) \\ -g \cdot t + v_0 \cdot \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

Nu ved vi også, at $\vec{v}(t) = \vec{r}\,'(t)$. Derfor leder vi efter den vektorfunktion $\vec{r}(t)$, som differentieret giver $\vec{v}(t)$. Vi integrerer derfor koordinatfunktionerne i $\vec{v}(t)$ og får

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t + k_3 \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + k_4 \end{pmatrix}$$

hvor k_3 og k_4 er konstanter. Indsætter vi $t = 0$ i $\vec{r}(t)$ får vi

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} k_3 \\ k_4 \end{pmatrix}$$

Samtidig ved vi fra antagelserne, at

$$\vec{r}(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ y_0 \end{pmatrix}$$

Det må betyde, at

$$k_3 = 0$$

og

$$k_4 = y_0$$

Altså er

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t \\ -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0 \end{pmatrix}$$

hvilket netop var det, vi gerne ville vise.

Vi vil nu undersøge, om banekurven for $\vec{r}$ er sammenfaldende med en parabel.

Fra den netop udledte parameterfremstilling for $\vec{r}$ har vi, at

$$x = v_0 \cdot \cos(\alpha) \cdot t$$
$$\Updownarrow$$
$$t = \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}$$

idet vi forudsætter, at $v_0 > 0$ (bolden kommer jo ingen steder, hvis $v_0 = 0$) og at $0 \leq \alpha < 90°$ (hvis $\alpha = 90°$, så er $\cos(\alpha) = 0$, og vi må ikke dividere med 0. Men så er du også en klovn! Hvis du kaster bolden med en elevationsvinkel på 90°, så får du den jo lige i knolden igen!).

Nå, men vi tager udtrykket for t og indsætter i koordinatfunktionen for y:

$$y(t) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot t^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot t + y_0$$

Så får vi

$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \left(\frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)}\right)^2 + v_0 \cdot \sin(\alpha) \cdot \frac{x}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} + y_0 \quad \Leftrightarrow$$
$$y(x) = -\frac{1}{2} \cdot g \cdot \frac{x^2}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} + \frac{v_0 \cdot \sin(\alpha)}{v_0 \cdot \cos(\alpha)} \cdot x + y_0 \quad \Leftrightarrow$$

$$y(x) = -\frac{g}{v_0^2 \cdot \cos^2(\alpha)} \cdot x^2 + \tan(\alpha) \cdot x + y_0$$

hvor vi har udnyttet at $\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$.
Vi ser nu, at dette er på formen $y = ax^2 + bx + c$, og banekurven er dermed en parabel.