Differensligninger og annuitetsopsparing og -lån

Vi har lært, at en lineær differensligning af første orden er på formen

$$y_{n+1} = a \cdot y_n + b$$

og vi har vist, at hvis $a \neq 0$ og $a \neq 1$, så vil løsningen til denne differensligning kunne skrives på lukket form på følgende måde

$$y_n = a^n \cdot y_0 + b \cdot \frac{a^n - 1}{a - 1}, \quad n = 0,1,2,\ldots$$

Bemærk, at løsningen siges at være på lukket form, fordi y_n ikke afhænger af de foregående tal i talfølgen bortset fra y_0.

Annuitetsopsparing

Når man laver en annuitetsopsparing, så betyder det, at man hver termin indbetaler et fast beløb b, hvor der til start står der ikke noget på kontoen. Hver termin tilskrives der renter, hvor vi kalder renten (i decimaltal) for r. Beløbet på kontoen efter n terminer kaldes for A_n. Da gælder følgende sætning:

Sætning - opsparingsannuitet

Hvis et fast beløb b indbetales hver termin, hvor renten er r, så vil værdien A_n efter n terminer være

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

hvor startbeløbet $A_0 = 0$.

Bevis

Hvis vi skal se på, hvad der står på kontoen efter $n+1$ terminer, A_{n+1}, så må det være det beløb, der stod der i forvejen (A_n), plus renter ($r \cdot A_n$), plus det fast beløb vi indbetaler hver termin (b). Det kan skrives som en differensligning på denne måde:

$$A_{n+1} = A_n + r \cdot A_n + b$$

Og ved en simpel omskrivning fås

$$A_{n+1} = (1+r) \cdot A_n + b$$

Vi ser nu til vores store glæde, at dette er en lineær differensligning af første orden, da ligningen er på formen $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$, hvor $y_{n+1} = A_{n+1}$, $y_n = A_n$, $a = 1 + r$ og $b = b$. Da renten er positiv vil $a \neq 0$ og $a \neq 1$. Derfor kan vi bruges den lukkede løsningsformel ovenfor til at opstille et udtryk for A_n:

$$A_n = (1+r)^n \cdot A_0 + b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{1 + r - 1}$$

Da der ikke står noget på kontoen til start er $A_0 = 0$ og forkorter vi lidt i nævneren ovenfor fås derfor

$$A_n = b \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r}$$

Det var netop, hvad vi ønskede at bevise.

□

Annuitetslån

Når man optager et annuitetslån, låner man et beløb G, som kaldes for hovedstolen. Hver termin tilskrives der renter af den restgæld, man har tilbage (renten kaldes for r) og samtidig indbetaler man hver termin en fast størrelse, som kaldes for ydelsen y.

Hvis man gerne vil have en bestemt hovedstol G, til en bestemt rente r som er tilbagebetalt efter n terminer, så kan ydelsen beregnes på denne måde:

Sætning - annuitetslån

Lad G være hovedstolen, r renten og n antal terminer, som lånet løber over. Da beregnes den faste ydelse y ved et annuitetslån på denne måde:

$$y = G \cdot \frac{r}{1-(1+r)^{-n}}$$

Bevis

Vi vil igen helt generelt se på lånets størrelse efter $n+1$ terminer G_{n+1}. Vi skylder det, vi i forvejen skyldte (G_n), plus renter ($r \cdot G_n$), minus det faste beløb vi indbetaler hver termin (y). Det kan skrives som en differensligning på denne måde:

$$G_{n+1} = G_n + r \cdot G_n - y$$

Og ved en simpel omskrivning fås

$$G_{n+1} = (1+r) \cdot G_n - y$$

Vi ser nu igen til vores store glæde, at dette også er en lineær differensligning af første orden, da ligningen er på formen $y_{n+1} = a \cdot y_n + b$, hvor $y_{n+1} = G_{n+1}$, $y_n = G_n$, $a = 1 + r$ og $b = -y$. Da renten er positiv vil $a \neq 0$ og $a \neq 1$. Derfor kan vi bruges den lukkede løsningsformel ovenfor til at opstille et udtryk for G_n:

$$G_n = (1+r)^n \cdot G_0 - y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{1+r-1}$$

For det første ser vi, at G_0 svarer til størrelsen af det beløb, som vi gerne vil låne. Altså er $G_0 = G$. For det andet løber lånet over n terminer. Dvs. at $G_n = 0$ (fordi når der er gået n terminer, så er lånet tilbagebetalt og derfor er restgælden $G_n = 0$). For det tredje forkorter nævneren til r. Derfor får vi

$$(1+r)^n \cdot G - y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = 0$$

Det vil sige, at

$$y \cdot \frac{(1+r)^n - 1}{r} = (1+r)^n \cdot G$$

Vi dividerer nu med $\frac{(1+r)^n-1}{r}$ (som for øvrigt ikke er 0) ved at gange med den omvendte brøk:

$$y = (1+r)^n \cdot G \cdot \frac{r}{(1+r)^n - 1}$$

Og ved lidt omrokering fås

$$y = G \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{(1+r)^n - 1}$$

Nu får vi den geniale idé at gange brøken med $\frac{(1+r)^{-n}}{(1+r)^{-n}}$, som jo bare er 1, skrevet på en lidt fjollet måde:

$$y = G \cdot \frac{r \cdot (1+r)^n}{((1+r)^n - 1)} \cdot \frac{(1+r)^{-n}}{(1+r)^{-n}}$$

To brøker ganges med hinanden ved at gange tæller med tæller og nævner med nævner. Samtidig udnytter jeg, at $(1+r)^n \cdot (1+r)^{-n} = (1+r)^0 = 1$ og får

$$y = G \cdot \frac{r}{1 - (1+r)^{-n}}$$

Hurra! Det var det, vi skulle vise.

$\square$