

Note om tæthedsfunktion og fordelingsfunktion

Husk, at for en normalfordelt stokastisk variabel $X \sim N(\mu, \sigma)$ gælder, at

$$P(a \leq X \leq b) = \int_a^b f(x)dx$$

hvor f er tæthedsfunktionen for X . Og om fordelingsfunktion F gælder

$$F(x) = P(X \leq x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

I det følgende vil vi bevise denne sætning:

Sætning

Lad X være en normalfordelt stokastisk variabel:

$$X \sim N(\mu, \sigma)$$

med tæthedsfunktion $f(x)$ og fordelingsfunktion $F(x)$.

Da gælder:

- a) $P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$
- b) $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$
- c) $P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a) = 1 - F(a)$

Bevis

Ad a)

Vi starter med at regne på $P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b)$:

$$P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx$$

Vi bruger nu indskudsreglen for bestemte integraler, som siger, at

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

Da får vi

$$P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b) = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^b f(x)dx = \int_{-\infty}^b f(x)dx$$

Men nu er $\int_{-\infty}^b f(x)dx = P(X \leq b)$. Det vil sige, at

$$P(X \leq a) + P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b)$$

og derfor er

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a)$$

Ad b)

Ifølge definitionen på fordelingsfunktionen fås direkte af ovenstående, at

$$P(a \leq X \leq b) = P(X \leq b) - P(X \leq a) = F(b) - F(a)$$

Ad c)

Vi starter med at regne på $P(X \leq a) + P(X \geq a)$:

$$P(X \leq a) + P(X \geq a) = \int_{-\infty}^a f(x)dx + \int_a^{\infty} f(x)dx$$

Vi bruger indskudsreglen og får

$$P(X \leq a) + P(X \geq a) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx$$

Men da

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)dx = 1$$

må

$$P(X \leq a) + P(X \geq a) = 1$$

Det vil sige, at

$$P(X \geq a) = 1 - P(X \leq a)$$

Som ifølge definitionen på fordelingsfunktionen også kan skrives

$$P(X \geq a) = 1 - F(a)$$

Det var netop, hvad vi skulle bevise.

