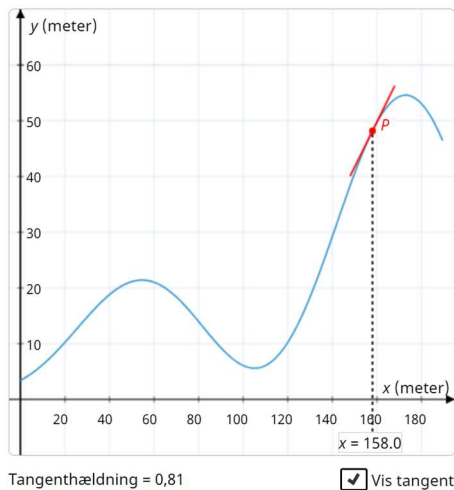
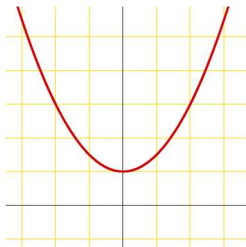


GRUPPEARBEJDE: Udledning af differentialkvotienter via tretrinsreglen

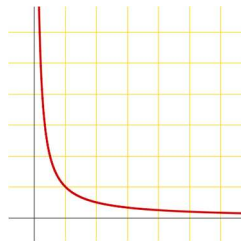


Vi drømmer om at kende en FORMEL for **tangenthældningen** (også kaldet *differentialkvotienten*) i et punkt (x_0, y_0) for specifikke funktionstyper,

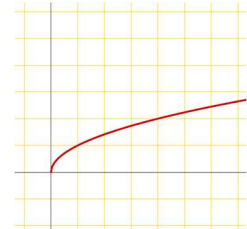
$$f(x) = ax^2 + c$$



$$f(x) = \frac{1}{x}$$



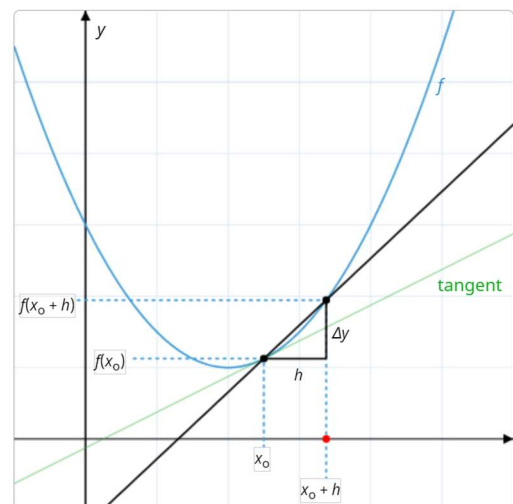
$$f(x) = \sqrt{x}$$



Til dette skal vi bruge ”**tretrinsreglen**”. Ideen bag tretrinsreglen er at vi *holder øje med sekantens hældning imens sekanten bliver til en tangent*.

Dette sker, når de **to punkter**, hvor sekanten rører grafen, **bliver til ét**.

Dette sker, når x -forskellen imellem punkterne, betegnet h bliver til 0.



Sekantens hældning er:

$$a_s = \frac{\Delta y}{h} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$$

Tretrinsreglen lyder:

1. **Opstil** sekanthældningen.
2. **Omskriv** udtrykket for sekanthældningen, så det bliver **ufarligt** at lade h gå mod 0.
3. **Bestem** det resulterende **formeludtryk**, der fremkommer af at h bliver gjort til 0 under kontrollerede forhold.

EKSEMPEL: anvendelse af tretrinsreglen

$$f(x) = x^2$$

1. **Opstil** sekanthældningen:

$$a_s = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} = \frac{(x_0 + h)^2 - x_0^2}{h} = \frac{x_0^2 + 2x_0h + h^2 - x_0^2}{h} = \frac{2x_0h + h^2}{h}$$

2. **Omskriv** udtrykket:

$$a_s = \frac{2x_0h + h^2}{h} = \frac{h(2x_0 + h)}{h} = 2x_0 + h$$

h blev sat uden for en parentes og "gik ud" med h 'et i nævneren. Med h væk fra nævneren er det **ufarligt**, at lade h "gå mod" 0.

3. Det resulterende **formeludtryk** af GRÆNSEPROCESSEN, hvor h går mod 0, må være

$$a_T = 2x_0 + 0 = 2x_0$$

Konklusion: Tangenthældningen i et punkt (x_0, y_0) på grafen for $f(x) = x^2$ er altid givet ved formeludtrykket $a_T = 2x_0$.

Det ovenstående eksempel er et bevis for følgende:

SÆTNING Funktionen

$$f(x) = x^2$$

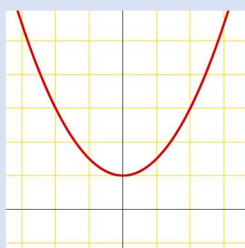
har differentialkvotienten

$$f'(x_0) = 2x_0$$

I skal i grupper **anvende tretrinsreglen** til at **bevise** følgende sætninger:

SÆTNING 1 Funktionen

$$f(x) = ax^2 + c$$

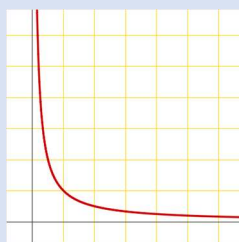


har differentialkvotienten

$$f'(x_0) = 2ax_0$$

SÆTNING 2 Funktionen

$$f(x) = \frac{1}{x}$$

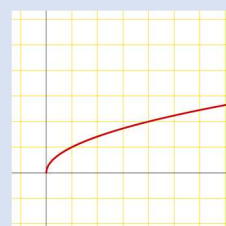


har differentialkvotienten

$$f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$$

SÆTNING 3 Funktionen

$$f(x) = \sqrt{x}$$



har differentialkvotienten

$$f'(x_0) = \frac{1}{2\sqrt{x_0}}$$

Find beviserne forsætningerne på følgende links:

SÆTNING 1: <https://www.youtube.com/watch?v=NF22jrn3drA>

SÆTNING 2: <https://www.youtube.com/watch?v=dxn1Rcslr8o&t=319s>

SÆTNING 3: <https://www.youtube.com/watch?v=6h1wEFfoAFo>