Cirkler som vektorfunktioner

# Cirklens parameterfremstilling

Vektorfunktionen fremstiller enhedscirklen når . Det følger af at
 er enhedsvektoren med retningsvinkel , og når varieres mellem og vil det punkt vektoren peger på bevæge sig hele vejen rundt i en cirkel.

Ved at gange med r fås en cirkel med centrum i origo og radius . Argument: Når man ganger en vektor med et tal, ændres vektorens længde men ikke dens retning.

Hvis man nu ønsker at flytte cirklen så centrum bliver i kan det gøres ved at parallelforskyde alle punkterne med i vandret retning og i lodret retning. Inden for vektorfunktioner er parallelforskydning meget nemt: man lægger bare vektor til:



# Jævn cirkelbevægelse

En jævn cirkelbevægelse er en bevægelse på en cirkel med konstant fart.

Vi kigger først på den jævne cirkelbevægelse som er beskrevet ved vektorfunktionen

Her er vinklen givet ved i stedet for bare ved . kaldes vinkelhastigheden og der gælder at hvor er omløbstiden (og dermed også at .

## Sætning

Hvis et punkt bevæger sig i en cirkel med radius og centrum i origo med konstant vinkelhastighed , vil punktets hastighedsvektor være ortogonal med punktets stedvektor, og punktets fart vil være givet ved . Punktets accelerationsvektor vil have retning ind mod cirklens centrum og størrelsen på accelerationen vil være .

# Bevis

Punktets position kan beskrives med vektorfunktionen

Hastighedsvektoren findes ved at differentiere stedfunktionen:

Bemærk at begge koordinatfunktioner er sammensatte funktioner og differentieres vha. kædereglen. Det sidste lighedstegn følger af definitionen af tværvektor.

Tværvektoren er vinkelret på den oprindelige vektor, altså . Og da er en konstant påvirker den kun længden af hastighedsvektoren og ikke dens retning. Altså er hastighedsvektoren vinkelret på stedvektoren .

Længden af hastighedsvektoren kan nu findes ved at udnytte at vi allerede kender længden af stedvektoren. Da stedvektoren går fra origo ud til et punkt som bevæger sig i en cirkel med radius , må længden af stedvektoren være . Altså er

Accelerationsvektoren findes ved at differentiere hastighedsvektoren

Accelerationsvektoren er altså modsatrettet af stedvektoren . Længden findes som før:

Dette kan illustreres på en figur som nedenstående:



# En udvidelse af vektorfunktionen for jævn cirkelbevægelse

Vektorfunktionen

svarer til at vinklen er 0 ved start (når t=0). Man kan dog nemt vælge en anden startvinkel ved at lægge en konstant til vinklen:

# Harmonisk svingning

Hvis man kombinerer pointerne fra de to foregående afsnit, fås en vektorfunktion, som beskriver en cirkel med radius , centrum i , vinkelhastighed og startvinkel :

y-koordinatfunktionen for denne vektorfunktion svarer til den harmoniske svingning.

Da hvor er omløbstiden er perioden givet ved .

Radius svarer til amplituden .

Centrums andenkoordinat svarer til ligevægten .

Og er faseforskydningen, altså hvor meget svingningen er forskubbet i forhold til standarden hvor startvinklen er 0.